
3 1761 06240139 3
UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

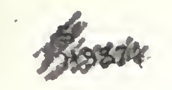
ŒUVRES COMPLÈTES

DE

CHRISTIAAN HUYGENS



Imprimerie de Joh. ENSCHEDÉ & Fils, Harlem.



ŒUVRES COMPLÈTES

DE

CHRISTIAAN HUYGENS

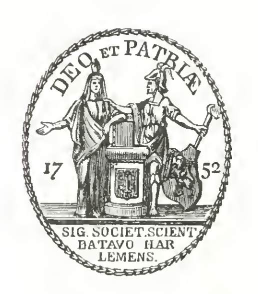
PUBLIÉES PAR LA

SOCIÉTÉ HOLLANDAISE DES SCIENCES

TOME DOUZIÈME

TRAVAUX DE MATHÉMATIQUES PURES

1652—1656



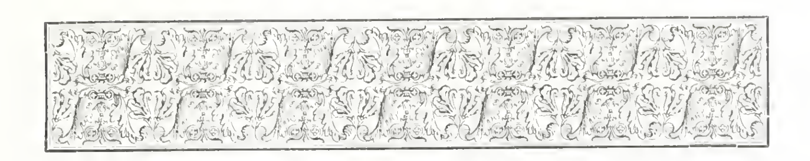
LA HAYE
MARTINUS NIJHOFF
1910

TRAVAUX DE MATHÉMATIQUES PURES
1652—1656.

TRAVAUX MATHÉMATIQUES DIVERS DE 1652 ET 1653.

PROBLÈMES PLANS ET SOLIDES.

MAXIMA ET MINIMA.



Avertiſſement.

En janvier 1652 Huygens commença à s'occuper affidûment de problèmes ſolides, c'eſt-à-dire de ceux dont l'analyſe algébrique amène des équations du troiſième ou quatrième degré; problèmes devant leſquels il s'était arrêté juſqu'alors quand il les avait rencontrés. [1]) Le point de départ de ces nouvelles recherches, comme de tant d'autres, [2]) lui eſt fourni par Archimède. Il s'agit cette fois du problème de couper une ſphère par un plan dans un rapport donné. Dans ſon ouvrage „De ſphaera et cylindro" [3]) Archimède n'en avait pas achevé la ſolution; il l'avait ſeulement réduit à un problème plus ſimple qui demande de couper une droite de longueur donnée en deux ſegments ſous des conditions qui font reconnaître le problème comme ſolide. [4]) Il eſt vrai qu' Eutocius dans ſes Commentaires ſur Archimède en avait rapporté trois ſolutions différentes; [5]) mais elles exigent la détermination de l'interſection d'une hyperbole avec une ellipſe

[1]) Comparez, au Tome XI, les pages 33 (Problème 7), 88 et 213.
[2]) Comparez les pages 50, 76, 83, 273 et 274 du Tome XI.
[3]) Voir les pages 210—219, T. I de l'édition de Heiberg, citée dans la note 2, p. 50 du T. XI ou les pages 45—47 de l'édition de Bâle, citée dans la note 3, p. 274 du T. XI.
[4]) Voir la note 16, p. 12 du Tome présent.
[5]) Voir, à la même page, les notes 15 et 17.

ou une parabole. Or, Descartes dans sa „Géométrie" [6]) avait montré qu'on pouvait réduire chaque problème solide à celui de trouver l'intersection d'une parabole avec un cercle. C'est ce que Huygens va accomplir, pour le problème en question, dans la pièce N°. I. [7]) Le même mois, d'ailleurs, il en élabora une seconde solution, [8]) basée cette fois sur la trisection de l'angle, parce qu'il considérait ces sortes de constructions, là où elles sont possibles, comme les plus simples et les plus pratiques pour les problèmes solides. [9]) C'est cette seconde solution qui, sous une forme un peu modifiée, a passé dans les „Illustrium quorundam problematum constructiones" de 1654. [10])

Les analyses qui ont conduit à ces solutions nous sont inconnues. Sans doute Huygens a commencé par déduire algébriquement l'équation cubique dont le problème dépend; il a appliqué ensuite les règles données par Descartes, au Livre III de sa „Géométrie", pour résoudre une telle équation par l'intersection d'une parabole avec un cercle ou par la trisection de l'angle; adaptant toutefois ces constructions autant que possible au problème à résoudre de manière à économiser sur les lignes à tirer. [11])

Le second problème solide traité par Huygens, est celui des deux moyennes proportionnelles. L'antiquité en connaissait plusieurs solutions qui nous ont été conservées. Parmi elles celle de Nicomède, fondée sur l'emploi de sa conchoïde, semble avoir frappé particulièrement Huygens. En effet, dès qu'on se demande de quelle manière Nicomède a pu parvenir à cette solution, elle nous apparaît comme une véritable énigme. Il est clair, d'abord, que la détermination des points d'intersection d'une droite avec une conchoïde doit mener en général à une équation du quatrième degré. Or, dans la solution de Nicomède, le pôle et la base de la conchoïde sont placés de telle façon que l'un des quatre points d'intersection qui

[6]) Voir l'article: „Façon generale pour construire tous les problesmes solides, reduits à une Equation de trois ou quatre dimensions," p. 464—469 du T. VI de l'édition récente des Œuvres de Descartes par Adam et Tannery.

[7]) Voir la page 9.

[8]) Voir la pièce N°. III, p. 16.

[9]) Comparez la première page de l'„Illustrium quorundam problematum constructiones," où on lit; „Et hæc construendi ratio in solidis problematis quodammodo simplicissima videtur, atque ad usum maximè accommodata." Les règles pour réduire les problèmes solides, qui en sont capables, à la trisection de l'angle avaient été données également par Descartes dans sa „Géométrie." Voir les pages 472—474, Tome VI de l'édition d'Adam et Tannery.

[10]) Voir l'ouvrage cité dans la note 1, p. 287 du T. I.

[11]) Comparez surtout la solution du problème de la pièce N°. XX, p. 83—86 du Tome présent où l'on peut suivre facilement le procédé que nous venons de décrire.

correfpondent aux racines de cette équation biquadratique eft conftruifible à l'aide de la feule règle et que de plus l'équation cubique, qui refte, se réduit à la forme binomiale. [12]) Mais comment Nicomède a-t-il pu réuffir à remplir ces conditions, indifpenfables au fuccès de fa folution? Huygens croit l'avoir deviné et il nous expofe fes idées là-deffus dans la pièce N°. II, du 30 janvier 1652. [13]) Il y fuppofe implicitement que l'antiquité était en poffeffion d'une analyfe algébrique qui reffemblait à la nôtre; opinion qu' il a exprimée formellement dans une lettre à Kinner à Löwenthurn du 9 août 1652 [14]) et qui fut partagée par d'autres favants de fon époque. [15])

Ayant fi bien réuffi, dans cette pièce N°. II, à retrouver la folution de Nicomède en la confidérant comme une folution particulière du problème plus général de mener par un point donné une droite de manière que deux droites, données en pofition, en découpent un fegment de longueur donnée, Huygens fe met à rechercher les cas où ce problème devient plan, c'eft-à-dire réfoluble à l'aide de la règle et du compas. [16]) De cette façon il obtient aifément les cas particuliers mentionnés par Pappus [17]) et dont il s'était déjà occupé en 1650, [18]) dans lefquels le point donné eft fitué fur une des biffectrices des angles formés par les droites données. Il les reprend et en trouve de nouvelles folutions, [19]) reproduites

---

[12]) Voir la figure 2 de la pièce N°. II, p. 15, où il s'agit de construire les deux moyennes entre LA et LG. Le point B y est le pôle, la droite AD la base de la conchoïde qui coupe la droite donnée CA au point E. Le pôle a été construit en prenant AR $= \frac{1}{2}$ AL $= \frac{1}{4}$ AC, AB $=$ $=$ DE $= \frac{1}{2}$ LG; la base en menant AD parallèle à CB. La solution parasitaire s'obtient en tirant la droite BL.

[13]) Voir les pages 13—15 du Tome présent.

[14]) Voir la page 237 du T. I, où on lit à propos de l'analyse algébrique „restituée" par Descartes „nam talem quoque veteribus Geometris in usu fuisse certissimis mihi indicijs constat."

[15]) Témoin la préface du „Tractatus de Concinnandis Demonstrationibus Geometricis ex Calculo Algebraïco", ouvrage posthume de Frans van Schooten (voir la note 1, p. 41 du T. III), publié par son frère Pieter, où celui-ci s'exprime comme il suit: „meus Frater, postquam methodo Synthetica scientiae hujus praeclara multa publicis tam scriptis quam praelectionibus cum fructu tradidisset, ad Analysin quoque, certissimam inveniendi artem, ejusque perficiendae rationem sua studia convertit. Neque dubitabat quin pleraque omnia, quae Veteribus tantum gloriae peperissent, Analyseos beneficio ac ope reperta essent: sed quae illi ut inventorum major admiratio foret, dissimulato hoc artificio & suppresso, vulgari tantum Syntheseos forma exhibuissent."

[16]) Voir la pièce N°. VI, p. 26—27.

[17]) Dans son aperçu de l'ouvrage „De inclinationibus" d'Apollonius, au lieu cité dans la note 2, p. 239 du T. XI.

[18]) Voir les pièces N°. IV et VIII, pp. 226 et 239 du T. XI.

[19]) Voir les pièces N°. IV, VI, VII, IX et XIII aux pages 20, 28, 34, 44, 57 et 58 du Tome présent.

pour la plupart dans les „Illuſtrium quorundam problematum conſtructiones."

Enſuite, dans la pièce N°. VIII [20]), du 14 février 1652, Huygens revient au cas général où le point donné occupe une poſition quelconque à l'intérieur de l'angle qui doit contenir le ſegment donné. Il en obtient une ſolution qui dépend de l'interſection d'une hyperbole et d'un cercle et ſe met enſuite à rechercher ce qu'on appelait alors la „determinatio" du problème, c'eſt-à-dire l'enſemble des conditions sous leſquelles la ſolution est poſſible. Cette „determinatio" exige ici la conſtruction du plus petit ſegment que, dans l'angle donné, on puiſſe faire paſſer par le point donné; ce qui conſtitue un nouveau problème ſolide dont Huygens donne trois ſolutions diverſes et qu'il reprend en septembre de la même année [21]) pour le traiter ſyſtématiquement par ſa règle „de maximis et minimis" qui eſt une modification de celle de Fermat. [22]) A cette occaſion il expoſe amplement les principes qui conduiſent à cette règle.

En attendant, en mars 1652, il était retourné au problème des deux moyennes proportionelles. Après avoir donné, pour le cas particulier de la duplication du cube, dans la pièce N°. X [23]) une première ſolution, dont l'analyſe nous eſt inconnue, accompagnée d'une conſtruction approximative élégante, il va procéder plus ſyſtématiquement par la méthode qui, ſelon lui, a amené la ſolution de Nicomède; c'eſt-à-dire il ſe poſe des problèmes dans leſquels il s'agit d'obtenir l'égalité de deux ſegments dont l'un eſt ſitué ſur une droite mobile, paſſant par un point donné, et l'autre ſur une droite fixe; [24]) il ſoumet ces problèmes à une analyſe algébrique conduiſant à une équation cubique ou biquadratique; après quoi il choiſit les données du problème de manière à ſimplifier cette équation juſqu' à ce qu'elle ſe réduiſe à une équation cubique binomiale. Alors, pourvu qu'on ſuppoſe accomplie l'égaliſation des deux ſegments, il eſt en poſſeſſion d'une ſolution nouvelle du problème des deux moyennes.

Les ſolutions obtenues de cette façon ont paſſé dans les „Illuſtrium quorundam problematum conſtructiones", [25]) mais sans les analyſes et ſous des rédactions modifiées.

Enſuite, après un intervalle de pluſieurs mois, pendant leſquels Huygens a

[20]) Voir les pages 38—41 du Tome présent.
[21]) Voir la pièce N°. XIV, p. 66—68 du Tome présent.
[22]) Consulter le § 11 de la page 19 du T. XI et la note 11, p. 48 du même Tome.
[23]) Voir la p. 45 du Tome présent.
[24]) Voir les débuts des pièces N°. XI et N°. XII, pp. 49 et 54 du Tome présent.
[25]) Comme „Probl. III".

commencé ses recherches sur la dioptrique [26]) et posé les bases de sa théorie de la percussion des corps durs, [27]) il aborde en septembre 1653 deux autres problèmes solides; en premier lieu celui des normales à abaisser d'un point donné sur une parabole donnée, problème dont Apollonius s'était occupé au cinquième livre de ses „Coniques". Par la méthode esquissée au second alinéa du présent „Avertissement" Huygens parvient à résoudre ce problème à l'aide des intersections d'un cercle avec la parabole même qui est donnée. [28]) Alors il se pose la question si une telle solution où il n'entre d'autres courbes que le cercle et la courbe qu'on estime connue, doit être comptée comme plane ou comme solide. Huygens incline vers la première interprétation et il croit pouvoir expliquer de cette façon un passage où Pappus reproche à Apollonius, qui s'était servi d'une hyperbole pour la résolution du problème en question, d'avoir employé une conique dans la solution d'un problème plan. [29])

Le dernier problème solide [30]) résolu par Huygens dans la période qui nous occupe, est celui de la détermination du point d'inflexion de la conchoïde de Nicomède. Il le réduit d'abord à une question „de maximis et minimis," à laquelle il applique la méthode exposée dans la pièce N°. XIV; ce qui amène une équation cubique résoluble, comme toujours, à l'aide d'un cercle et d'une parabole et, entre certaines limites des données, par la trisection de l'angle. Dans ce dernier cas Huygens a cru, au premier abord, qu'on pourrait se servir, pour la trisection de l'angle en question de la conchoïde même qu'on suppose donnée. [31]) Alors, comme nous l'avons vu, le problème se rangerait, selon lui, parmi les problèmes plans; mais il semble qu'il ait abandonné bientôt cette pensée. [32]) Une remarque, qui, dans la pièce N°. XX y donnait expression, est supprimée dans les „Illustrium quorundam problematum solutiones" où le problème apparaît comme „Problema VIII."

C'est ici la partie principale de l'œuvre purement mathématique des années 1652

[26]) Comparez la note 17, p. 91 du T. XI.
[27]) On trouvera ces travaux sur la dioptrique et sur la percussion dans d'autres volumes de la présente publication.
[28]) Voir la pièce N°. XIX, p. 81 du Tome présent.
[29]) Voir, pour ce passage, la note 5, p. 82 du Tome présent.
[30]) Voir la pièce N°. XX, p. 83.
[31]) Voir le dernier alinéa de la page 86 du Tome présent.
[32]) Voir la note 10 de la page citée.

et 1653 pour autant qu'elle nous a été conſervée. Nous n'y avons à ajouter que les pièces N°. V, XV, XVI, XVII, XVIII et XXI dont nous n'avons pas encore parlé.

La première de ces pièces, le N°. V, [33]) a, évidemment, été compoſée par Huygens pour ſe faciliter la rédaction, à la mode des anciens, des démonſtrations et conſtructions auxquelles il avait été conduit par l'analyſe algébrique, et le N°. XVI [34]) peut être conſidéré comme un exemple de l'application à un problème plan déterminé des règles expoſées dans le N°. V.

Le N°. XV [35]) donne une déduction algébrique de la formule célèbre de Héron qui exprime l'aire d'un triangle en fonction des côtés.

Les pièces N° XVII [36]) et N°. XVIII [37]) contiennent la détermination de la tangente à la ciſſoïde et à la conchoïde dans le cas du point de rebrouſſement. Comme la méthode de Deſcartes [38]) y eſt employée, cette détermination ſe réduit à une queſtion „de maximis et minimis" traitable par les méthodes expoſées dans la pièce N°. XIV.

Enfin le N°. XXI [39]) applique au triangle une méthode inventée par van Schooten pour déterminer les centres de gravité de certaines figures ſimples.

---

[33]) Voir les pages 21—25 du Tome préſent

[34]) Voir les pages 72—75.

[35]) Voir les pages 69—71.

[36]) Voir les pages 76—78.

[37]) Voir les pages 79—80.

[38]) Voir la note 10, p. 65.

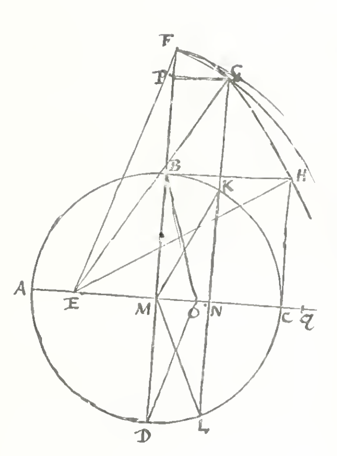
[39]) Voir les pages 87—89.

I.[1])

1652.

13 Jan. 1652. Prop. 4. lib. 2. Archim. de Sphaer. et Cylind. [2])

Datam ſphaeram ſecare plano, ita ut portiones inter ſe rationem habeant eandem datae. [3])



Sit data ſphaera ABCD quam oporteat ſecare plano KL, ita ut portio LAK ad KCL portionem eam habeat rationem quam CE ad EA.

Secetur ſphaera per centrum, atque eſto ſectio circulus ABCD, diameter ejus BD et centrum M. Producatur DB et ſit BF aequalis ſemidiam°. BM et deſcribatur in eodem plano in quo eſt circulus ABCD parabola FGH, cujus vertex ſit punctum F axis FB et latus rectum aequale ipſi FB vel BM. Jungatur deinde EF, centroque E, radio EF deſcribatur circuli circumferentia FG, quae ubi parabolam deſcriptam proxime verticem ſecabit in G, inde ducatur GKL parall. FD, et ſecetur ſphaera plano ſecundum KL quod rectum ſit ad planum ABCD.

dico portionem LAK eſſe ad portionem reliquam KCL ut CE ad EA. [4])

[1]) La pièce est empruntée aux pages 179—181 du manuscrit N°. 12, mentionné dans la note 1, T. XI, p, 7.

[2]) Voir la note 3, p. 3 du Tome présent.

[3]) On trouvera une autre solution du même problème dans la pièce N°. III, p. 16 du Tome présent.

[4]) Cette construction fut communiquée à Grégoire de St. Vincent le 24 janvier 1652; voir la

Quod autem circumferentia FG parabolam fecabit inter verticis punctum F et punctum H in quo BH perpendicularis ad FB, occurrit parabolae, hoc inde manifeftum fiet. Jungantur EH, HC. Quoniam igitur FB aequalis eft lateri recto parabolae FGH, erit neceffario etiam BH aequalis FB vel MC quare CH parallela et aequalis BM. Eft autem quadr. EF aequale iftis fimul quadrato FM, hoc eft quatuor quadr.is MH [5]) et qu.° ME. at qu. EH aequale eft iftis qu.is ex EC et CH, hoc eft duobus qu.is MH [5]) una cum qu.° ME et duobus rectangulis EMC, ergo quia hinc duo rect.la EMC minora funt duobus iftinc quadratis MH [5]), et reliqua utrinque communia, apparet quadr. EH minus effe qu.° EF; itaque punctum H intra circumferentiam cadet FG; fed eadem circumf. FG ad verticem F neceffario ingreffa eft parabolam FGH. ergo eandem hanc fecabit inter puncta F et H: quod erat primò oftendendum.

Fiat nunc ficut CM at MN potentia, ita MN ad NO longitudine, [6]) ponaturque OQ aequalis duplae MN. Jungantur deinde MK, ML atque item EG, et fit GP perpend. ad FB. Quia igitur aequales funt EF, EG aequalia quoque erunt earum quadrata. ergo quadrata FM et ME fimul aequalia quadratis GN, NE. quadr.i autem FM exceffus fuper quadr. GN, aequatur duobus rectang.is PFM, hoc eft, quatuor quadratis ex PG, minus qua.° PF. [7]) Sed quadratum EM deficit à qu.° EN duplo rectangulo EMN et qu.° MN. ergo cum hic defectus ifti exceffus aequalis fit neceffariò [8]), erit duplum ▭ EMN una cum qu.° MN aequale quatuor qu.tis PG five 4 □is MN minus qu.° PF. et ablato utrinque qu.° MN, erit duplum ▭ EMN aequale tribus qu.is MN minus qu.° PF, ideoque qu. PF aequale exceffui trium qu.orum MN fuper duplo ▭° EMN. Quia autem ut FB, quae aequalis eft lateri recto parabolae, ad PG, ita haec ad PF, erit quoque ut qu. FB ad qu. PG, five ut qu. CM ad qu. MN, hoc eft ut MN linea ad NO, ita qu. PG. ad qu. PF, hoc eft ad exceffum trium qu.orum MN fuper duplo ▭ EMN. fed ut qu. PG feu qu. MN ad dictum exceffum qui aequatur ▭° fub MN et fub eo quo tripla MN excedit

---

Lettre N°. 118 et la pièce N°. 119, p. 172 du T. I. Comme Huygens en fait la remarque dans sa lettre, Grégoire s'était occupé autrefois du même problème. En effet, aux pages 1021—1022 de son grand ouvrage, cité dans la note 6, p. 53, T. I, celui-ci, sans arriver à une solution proprement dite, avait montré qu'on pouvait réduire le problème à celui de couper un segment de parabole dans le rapport donné par une droite parallèle à l'axe de la parabole; ce qui d'ailleurs est très évident et n'avance guère la solution.

[5]) Lisez : MC.

[6]) C'est-à-dire $CM^2 : MN^2 = MN : NO$.

[7]) On a, en effet, $FM^2 - GN^2 = (FM - GN)(FM + GN) = PF\,(2\,FM - PF) = 2\,PF \times \times FM - PF^2 = 4\,BF \times FP - PF^2$; où $BF \times FP = PG^2$, puisque BF est le „latus rectum" de la parabole.

[8]) Huygens ajoute ici en marge „hoc melius paulo ante"; ce qui veut dire : de suite après la phrase „FM et ME simul aequalia quadratis GN, NE."

duplam EM, ita eſt MN ad id ipſum quo tripla MN excedit duplam EM; ergo quoque ut MN ad NO ita eadem MN ad 3MN minus 2EM. aequalis eſt igitur exceſſus triplae MN ſuper dupla EM ipſi NO ideoque tripla MN ablato NO, hoc eſt MQ (eſt enim OQ ex conſtr. aequalis duabus MN) aequabitur duplae EM.

Porro quoniam qu. CM. ſeu qu. KM eſt ad qu. MN ut MN linea ad NO, [9]) erit quoque per converſionem rationis qu. KM cui aequale qu MB, ad qu. KN ut MN ad MO. ſed ut qu. BM ad qu. KN, ita eſt circulus circa diametrum BD ad circulum circa KL diametrum. ergo conus baſin habens circulum circa BD et altitudinem MO aequalis eſt cono KML. [a 10]) Eſt autem dimidia ſphaera BCD, cui aequalis conus baſin habens circulum circa BD et alitudinem AC, ad conum dictum baſin eundem habentem circulum circa BD, et altitudinem MO, ut AC ad MO: ergo dimidia sphaera BCD eſt quoque ad conum KML ut AC ad MO. Sed eadem dimidia ſphaera eſt ad partem ſolidi BKLD, quae remanet dempto cono KML, ut eadem AC ad OQ, (eſt enim dicta ſemiſphaera ad ſectorem ſolidum MKCL ſicut ſuperficies ſphaerica BCD ad ſuperficiem KCL [b 11]), hoc eſt ut rectangulum ACM ad rectangulum ACN [c 12]), ſive ut MC ad CN, ac proinde per converſionem rationis quoque ſemiſphaera BCD ad dictam partem ſolidi BKLD quae remanet dempto cono KML ut CM ad MN ſive ut AC ad duplam MN quae eſt OQ). Ergo ſemisphaera BCD erit ad totam partem ſolidam BKLD ut AC ad totam MQ, [d 13]) quae aequalis duplae EM oſtenſa

---

[9]) Par construction.

[10]) *a*. 15. 12. Elem." [Huygens]. Voici cette „Prop. 15" du „Lib. 12" des „Elementa" d'Euclide dans l'édition de Clavius citée dans la note 6, p. 477, T. I: „Aequalium conorum, & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines: & quorum conorum, & cylindrorum reciprocantur bases & altitudines, illi sunt aequales." (Clavius, p. 480).

[11]) „*b* ultima lib. 1. Archim." [Huygens]. „Cuicunque portioni sphaerae aequatur conus ille, qui basim habeat aequalem superficiei sectionis sphaerae, quae secundum dictam portionem habeatur: altitudinem uero aequalem sphaerae semidiametro." Voir p. 40 de l'édition de Bâle citée p. 137 du T. I note 1 ou celle de Heiberg T. I, p. 181; citée p. 50 du T. XI, note 2.

[12]) „*c* 40. lib. 1. Archim." [Huygens]. „Superficies cuiuscunque portionis sphaerae, quae quidem portio sit dimidia sphaera minor, aequalis est circulo, cuius semidiametros aequatur lineae illi, quae à uertice portionis ad circumferentiam circuli ducta sit, qui circulus portionis est basis." (p. 39 de l'édition de Bâle, où elle se trouve, en effet, sous le numéro 40; chez Heiberg, page 177 du T. I, elle porte le numéro 42.)

[13]) *d* 24.5. Elem. potuere tamen melius rationes disponi." [Huygens]. Voir la note 28 de la page 312 du Tome XI. Pour appliquer la proposition, considérons les proportions suivantes:

conus KML : dimidia sphaera BCD = MO : AC

portio BKLD — conus KLM : dimidia sphaera BCD = OQ : AC;

ce qui amène par la proposition citée:

portio BKLD : dimidia sphaera BCD = MQ : AC;

ſuit, [14]) hoc eſt, ut AM ad ME. Quare et per converſionem rationis, erit ſemiſphaera BCD ad portionem KCL ut MA ad AE. ideoque tota ſphaera ABCD ad dictam portionem KCL ut AC ad AE, et dividendo, portio KAL ad portionem KCL ut CE ad EA: quod erat demonſtrandum.

Idem problema compoſuit dionyſidorus ope parabolae ſimul et hijperboles. Diocles per ellipſis et hijperbolen. [15]) Ipſe vero Archimedes conſtructionem non dedit, [16]) niſi ea fortaſſis ipſius eſt quam Eutocius in vetuſto libro ſe reperiſſe teſtatur; [17]) quae ſimilis dionijſidori, nam per hijperbolam item et parabolam abſolvitur.

---

proportion identique avec celle du texte, à part l'ordre des termes que nous avons dû changer aussi dans les deux autres proportions pour pouvoir appliquer la proposition d'Euclide.

[14]) Voir la fin de l'alinéa précédent.

[15]) On rencontre ces solutions de Dionysidore et de Dioclès dans les Commentaires d'Eutocius sur l'ouvrage d'Archimède „De sphaera et cylindro"; voir les p. 37—42 de l'édition de Bâle. (Heiberg, p. 180—209 du T. III.)

[16]) La solution avait été réduite par Archimède à celle du problème suivant: „datis duabus lineis $B\Delta$ et BZ, quarum $B\Delta$ duplo maior est linea BZ, et puncto Θ in linea BZ, lineam ΔB in puncto X ita secare, ut fiat $B\Delta^2 : \Delta X^2 = XZ : Z\Theta$."

Δ X B Θ Z

(Heiberg, T. I, p. 215; p. 46 de l'édition de Bâle). Posant $B\Delta = a$, $\Delta Z = b$, $Z\Theta = c$, $\Delta X = x$, ce problème se réduit à la solution de l'équation cubique $a^2 : x^2 = (b - x) : c$.

[17]) Le passage cité dans la note précédente est suivi par la phrase „quorum utrumque in fine et resoluetur et componetur." Toutefois cette résolution et composition manquent dans l'œuvre authentique d'Archimède. Or, Eutocius croit les avoir retrouvées dans un vieux manuscrit qu'il reproduit dans ses Commentaires (voir Heiberg, T. III, p. 152 — 179; p. 32 — 37 de l'édition de Bâle).

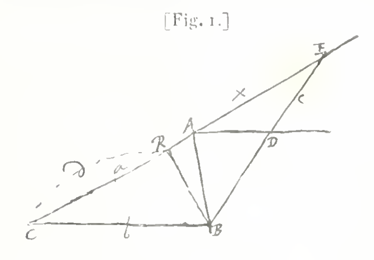
II.[1]

1652.

30 Jan. 1652.

Angulo positione dato et puncto extra ipsum lineam intra angulum accommodare datae longitudinis quae pertineat ad datum punctum. Et quomodo Nicomedes duas medias prop. invenerit ope Conchoidis.[2])

[Fig. 1.]



Sit datus angulus DAE, punctum B. Sit BC parallela AD et productae EA occurrat in C. Sitque BR perp. in EC.

Sit AC ∞ a; CB ∞ b; DE ∞ c; CR ∞ d nam et haec data. AE ∞ x.

Fit EB $\frac{ac + cx}{x}$ detracto autem quadrato EB à summa quadratorum EC, CB, reliquoque diviso per duplam CE, habebitur segmentum basis CR.

[1]) La pièce est empruntée aux pages 182 et 183 du manuscrit N°. 12. Huygens y traite le probléme de mener par un point donné une droite de telle manière que deux droites données par position en découpent un segment de longueur donnée. Il arrive à une équation biquadratique et montre ensuite comment, par la considération d'un cas particulier, on peut obtenir la construction de Nicomède, à l'aide de la conchoïde, des deux moyennes proportionelles entre deux longueurs données.

[2]) On trouve cette construction de Nicomède avec sa démonstration par Pappus à deux reprises et sous des redactions presque identiques au „Liber III, Prop. 5" et au „Liber IV, Prop. 24" des „Mathematicae Collectiones" de Pappus; voir dans l'édition de Hultsch (citée dans la note 17, p. 215 du Tome XI), T. I, pp. 58—63; 246—251 (pp. 5 verso — 6 recto;

$$\frac{aa + 2ax + xx + bb - \dfrac{aacc - 2accx - ccxx}{xx}}{2a + 2x} \infty\ d \text{ CR}$$

$$aa + 2ax + xx + bb - \frac{aacc - 2accx - ccxx}{xx} \infty\ 2ad + 2dx$$

$$x^4 \begin{array}{l} + 2a \\ - 2d \end{array} x^3 \left.\begin{array}{l} + bb \\ + aa \\ - cc \\ - 2ad \end{array}\right| xx - 2accx - aacc \infty\ 0$$

Hic animadvertit Nicomedes,[3] si $bb + aa$ esset $\infty\ cc + 2ad$ tunc tertium terminum evanescere: tunc autem $\frac{bb + aa - cc}{2a} \infty\ d$. Sed ad hoc obtinendum oportet ut AB ponatur aequalis datae DE $\infty\ c$; tunc enim in $\triangle^{o}$ CBA erit segmentum basis CR $\infty\ \frac{bb + aa - cc}{2a}$.

Ablato sic tertio termino, ductoque $\frac{bb + aa - cc}{a}$ in x^3, loco $2d$, manet ipsi haec aequatio.

$$x^4 + ax^3 \left.\begin{array}{l} - bb \\ + \dfrac{cc}{a} \end{array}\right| x^3 - 2acc\,x - aacc \infty\ 0$$

Hic vidit[4] $2accx + aacc$ dividi posse per $x + \frac{1}{2}a$ fierique tunc $2ac^2$ si igitur id quod in x^3 ductum est aequale esset $\frac{1}{2}a$, tunc etiam

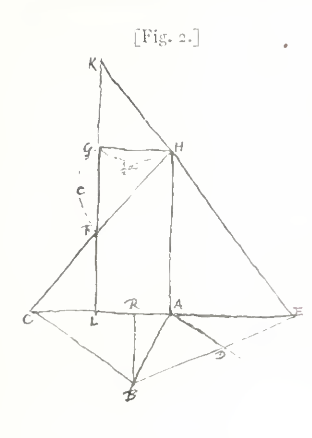
$$x^4 \left.\begin{array}{l} + aa \\ - bb \\ + \dfrac{cc}{a} \end{array}\right| x^3 \text{ dividi posset per } x + \tfrac{1}{2}a \text{ fieretque } x^3 \text{ quotiens.}$$

56 verso — 57 recto de l'ouvrage cité dans la note 3, p. 259 de notre T. II). On la retrouve encore dans les Commentaires d'Eutocius sur le „Liber II" de l'ouvrage d'Archimède. „De sphaera et cylindro"; voir les p. 26—27 de l'édition de Bâle (Heiberg, T. III, p. 122—127).

[3]) Bien entendu Huygens suppose que Nicomède soit arrivé par cette voie à sa construction. En effet, on n'en trouve rien aux lieux cités dans la note précédente, où Nicomède égale AB à DE par construction sans le motiver d'aucune façon.

[4]) D'après la supposition de Huygens.

[Fig. 2.]



fecit igitur $\frac{aa - bb + cc}{a} \propto \frac{1}{2}a$

$$aa - bb + cc \propto \tfrac{1}{2}aa$$

$$bb \propto \tfrac{1}{2}aa + cc$$

sed d erat $\propto \frac{bb + aa - cc}{2a}$ quod nunc erit $\frac{\frac{1}{2}aa + cc + aa - cc}{2a}$ sive $\frac{3}{4}a$. ergo $d \propto \frac{3}{4}a$.

Ponendo igitur AB $\propto$ DE et CR $\propto \frac{3}{4}$ CA habet hanc aequationem.

$$x^4 + \tfrac{1}{2}ax^3 - 2accx - aacc \propto 0$$

dividendo per $x + \frac{1}{2}a$ fit $x^3 - 2acc \propto 0$

$$x^3 \propto 2acc$$

$$x \propto \sqrt{C.\,2acc}.$$

Est autem $\sqrt{C.\,2acc}$ secunda duarum mediarum proportionalium inter c et $2a$, vel etiam inter $2c$ et $\frac{1}{2}a$. atque hoc posterius delegit Nicomedes in sua constructione.

COMPOSITIO NICOMEDIS.

AC [5]) dupla AL, AR dimidia AL. RB perpend. LA. AB $\propto$ GF vel FL. Junctae CB parallela AD. BDE linea ope Conchoidis ducta ita ut intercepta DE sit $\propto$ AB, vel GF.

Continue prop.les sunt HA, AE, KG, GH. [6])

---

[5]) Voir la figure 2, qui correspond exactement avec celles de Pappus et d'Eutocius aux lieux cités dans la note 2.

[6]) En effet, posant HA $= 2c$, GH $= \frac{1}{2}a$ (donc AB $= c$, AR $= \frac{1}{4}a$, CR $= \frac{3}{4}a$) on a d'après l'analyse qui précède : AE $= x$ (voir aussi la fig. 1) $= \sqrt[3]{2acc} = \sqrt[3]{(2c)^2 \times \frac{1}{2}a}$; ensuite KG $=$ HA $\times$ GH : AE $= \sqrt[3]{\frac{1}{2}a^2c} = \sqrt[3]{(2c) \times (\frac{1}{2}a)^2}$. Il est curieux de remarquer le rôle de la racine éliminée $x = -\frac{1}{2}a$. Elle correspond à une solution parasitaire qu'on obtient en tirant la droite BL. Ainsi le point L appartient à la seconde branche de la conchoïde.

III. [1]

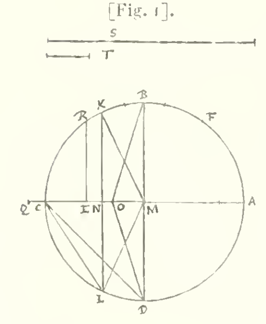
1652.

Ult. Jan. 1652.

Sphaeram in data ratione plano ſecare, [2]) *per triſectionem anguli* [3]).

Eſto ſphaera cujus centrum M, diameter CA. et data ſit proportio S majoris ad T minorem

[Fig. 1].



Secetur ſphaera plano ſecundum AC diametrum eaque ſectio ſit circulus ABCD. Porro dividatur AC in E, ut ſit ſicut S ad T ita EA ad EC, et ſit ER perpendicularis ipſi AC. Sumatur autem arcui CR aequalis arcus AF, et ei quae ſubtendit tertiam partem arcus RF ponatur aequalis MN, quam manifeſtum eſt minorem fore quam ME. Denique per N punctum ducatur planum quod diametro AC ſit ad angulos rectos. Dico hoc ſphaeram ſic ſecare ut portio KAL eam habet rationem ad KCL portionem quam S ad T. [4])

Ducatur enim BMD parallela KL, et jungantur CD, CL et KM, ML. Ipſi vero EM ſit aequalis EQ, et duplae EN aequalis MO, et jungantur OB, OD.

[1]) La pièce se trouve aux pages 184—186 du manuscrit N°. 12.

[2]) Le problème est identique avec celui de la pièce N°. I.

[3]) On retrouvera la construction et la démonstration qui vont suivre, dans les „Illustrium quorundam problematum constructiones" de 1654 au „Problema I"; mais sous une rédaction assez différente et même avec des modifications dans la construction.

[4]) Une construction modifiée fut communiquée à Kinner à Löwenthurm dans une lettre du 9 août 1653 (p. 239 du T. I). Celui-ci en loua l'élégance et la simplicité dans ses lettres du

Quia autem EN eſt exceſſus ipſius EM ſupra NM, manifeſtum eſt, id quo dupla EM hoc eſt quo QM excedit duplam NM aequari duplae EN hoc eſt ipſi OM. Itaque dupla NM addita ad OM aequatur ipſi QM, ac proinde erit dupla NM aequalis OQ. Ergo duae ſimul OQ et NM aequales triplae NM. Sed eadem OQ, NM ſimul aequales ſunt duabus QM, ON. Itaque et tripla NM aequalis duabus QM, ON.

Eſt autem NM aequalis ei quae ſubtenſa eſt tertiae parti arcus RF. at verò QM, cum ſit dupla EM, aequatur ei quae totum RF arcum ſubtendit. Itaque tres ſimul quae tertias partes ſubtendunt arcus RF aequantur ſubtenſae totius arcus et ipſi NO. Sicut igitur quadratum radij MK ad qu. ejus quae tertiam partem ſubtendit arcus RF, hoc eſt, ad qu. MN ita eſt ipſa NM ad NO longitudine. hoc enim poſtea oſtendetur. [5]) Quare et per converſionem rationis ut qu. KM ad qu. KN ita NM ad MO. Ut autem qu. KM hoc eſt qu. BM ad qu. KN ita eſt circulus circa diametrum BD ad circulum cujus KL diameter. Ergo quoque ille circulus ad hunc erit ut NM ad MO, ac proinde aequalis conus BOD cono KML, quia eorum baſes et altitudines reciprocantur [6]). Conus autem BOD eſt ad ſemiſphaeram BCD, hoc eſt, ad conum baſin habentem circulum circa diametrum BD et altitudine duplam MC, [7]) ut MO ad duplam MC, quoniam eadem baſi inſiſtunt. Itaque et conus KML erit ad ſemiſphaeram BCD ut MO ad duplam MC. Porro autem eſt ſemiſphaera eadem ad ſectorem ſolidum MKCL ut ſuperficies ſphaerica illius ad hujus ſuperficiem [8]) id eſt ut MC ad NC [9]), quare et per converſionem

28 août 1653 et du 28 février 1654; voir les pp. 241 et 270 du T. I. Pour se convaincre de l'identité essentielle des deux constructions il suffit de calculer la corde de l'arc qui est divisé en trois parties égales. On trouvera dans les deux cas: $\frac{S-T}{S+T}$. AC.

[5]) Voir, plus loin dans cette même pièce, le théorème que nous avons cursivé. En effet, il est clair que $NO = 3\,MN - RF$ est égal à la ligne du theorème „ad quam subtensa tertiae partis eam habet rationem quam quadratum semidiametri ad quadratum ipsius tertiae arcus parti subtensae."

[6]) Huygens ajoute en marge „15. 12. Elem." Consultez la note 10 de la pièce N°. I, p. 11 du Tome présent.

[7]) Huygens ajoute „32. l. 1. Archim. de Sphaer. et Cylind." Quaelibet sphaera quadrupla est eius coni, qui quidem conus habuerit basim aequalem circulo in sphaera maximo altitudinem uero aequalem semidiametro sphaerae." (p. 32 de l'édition de Bâle; Heiberg, T. I, p. 141, où elle porte le numéro 34).

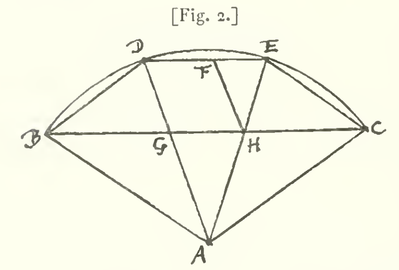
[8]) Huygens ajoute „42. 1. Arch. de Sphaer. et Cylin." Voir la note 11, p. 11 du Tome présent.

[9]) Huygens ajoute „3. 2. Arch. de Sph. et Cylind." „Datam sphaeram sic secare plana superficie, ut portionum superficies inter se similem cuicumque proportioni datae retineant proportionem" (p. 45 de l'édition de Bâle, Heiberg, T. I, p. 207). On n'y trouve pas expressément la proposition en question; mais elle se déduit facilement de celle citée dans la note 12 de la pièce N°. I, p. 11 du Tome présent, et le même raisonnement, dont on a besoin alors, est suivi dans le texte de la Prop. 3, Libr. 2 mentionnée.

rationis et invertendo, erit pars ſemiſphaerae, quae remanet dempto ſectore KMLC, ad ipſam ſemiſphaeram, ut NM ad MC, ſive ut dupla NM quae eſt OQ ad duplam MC. Verum oſtenſum fuit eſſe conum KML ad eandem ſemiſphaeram, ut OM ad duplam MC. Itaque tota pars ſolida KLDB erit ad ſemiſphaeram BCD ut tota QM ad duplam MC [10]) ſive ut EM ad MC. Quare invertendo rurſus et per converſionem rationis erit ſemiſphaera dicta ad portionem KLC ut MC ad CE: Et proinde ſphaera tota ad KLC portionem ut AC ad CE. Et dividendo, portio KAL ad portionem KCL ut AE ad EC, hoc eſt ut S ad T. Quod erat oſtendendum.

Circumferentiae arcu qui dimidia circumferentia minor ſit in tria aequa ſecto; tres ſimul rectae quae aequalibus partibus ſubtenduntur, aequales ſunt ei quae toti arcui ſubtenditur una cum ea linea ad quam ſubtenſa tertiae partis eam habet rationem quam quadratum ſemidiametri ad quadratum ipſius tertiae arcus parti ſubtenſae.

[Fig. 2.]



Arcus Sectoris ABC in tria aequa diviſus ſit punctis D et E, ſubtendanturque partibus rectae BD, DE, EC, et toti arcui linea BC.

Dico tres ſimul BD, DE, EC aequari ſubtenſae BC una cum ea ad quam DE eam habeat rationem quam quadratum AE ad ED quadratum.

Ductis enim AD, AE, quae ipſam BC ſecant in G et H, ducatur HF parallela AD. Conſtat ergo ſimiles eſſe triangulos ACE, CEH; quare ut AE ad EC ita erit EC ad EH. Itaque proportio AE ad EH duplicata eſt ejus quae AE ad EC, ac proinde eadem quae quadrati AE ad qu. EC vel qu. ED. Sicut autem AE ad EH ita eſt DE ad EF, ergo quoque ut qu. AE ad qu. ED ita DE ad EF. DF autem aequalis GH. Itaque cum BD ſit aequalis ipſi BG, et CE ipſi CH, et DE duabus GH et FE; apparet tres ſimul BD, DE, EC aequari toti BC ſimul et FE, ad quam DE oſtenſa eſt eam habere rationem quam AE qu. ad qu. ED.

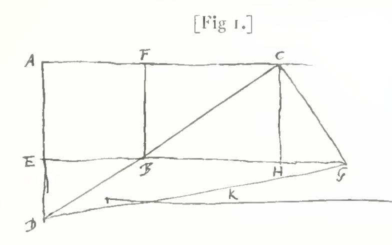
[10]) Huygens ajoute „24. 5. Elem." Voir sur cette proposition la note 28 de la page 312 du T. XI et la note 13, p. 11 du Tome présent. C'est encore ici la seconde partie de la proposition qu'on doit appliquer.

IV.[1])

[1652].[2])

Dato quadrato AB cujus duo latera AF, AE producta sint et data linea K, ponere huic aequalem lineam inter productas AC, AD quae transeat per punctum B. Oportet autem K non minorem esse dupla diagonali quadrati quod datur. [3])

[Fig 1.]



Factum sit, et sit ex hijpot. aptata DBC aequalis ipsi K. Ducatur ipsi DC, CG ad angulos rectos occurrens productae EB in G, et jungatur DG.

Similia autem sunt △.a EBD, HCG, et latus EB aequale CH, ergo et DB aequale CG, et ED ipsi HG. Quadrata autem DC, CG aequalia sunt qu.o DG, quoniam angulus ad C rectus. Sed eidem quadrato DG aequantur qu.a duo GE, ED, ergo qu. DC una cum qu. CG, hoc est qu.a DC, DB, aequalia quadratis DE, EG, quare auferendo utrinque qu. DE, erit qu. DC una cum qu.o EB, aequale qu.o EG. Datur autem quadr. DC aequale qu.o ex K, et datum quoque est qu. EB. Itaque et summa utriusque dabitur. Datum igitur quoque qu. EG quare et ipsa EG data erit. unde et BG data. Angulus autem BCG rectus est, ideoque punctum C erit ad circuli circumferentiam cujus diameter BG. Sed idem punctum est etiam ad lineam rectam AC, quae positione data est, et circulus quoque positione datus

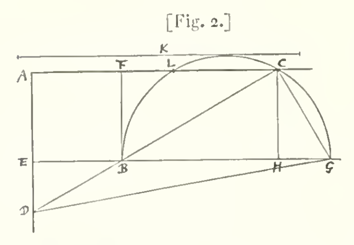
[1]) La pièce se trouve à la page 187 du manuscrit N°. 12.

[2]) Le lieu que la pièce occupe dans le manuscrit, immédiatement après la pièce N°. III, ne laisse aucun doute sur cette date.

[3]) On retrouve le même problème avec la même construction et démonstration, mais sous des rédactions différentes, dans une lettre à van Schooten du 23 octobre 1653 (voir les pages 250 et 251 du T I) et dans les „Illustrium quorundam problematum constructiones” de 1654 au

quoniam diameter BG poſitione data eſt. Ergo et punctum C poſitione datum erit, dictae videlicet circumferentiae et rectae AC interſectio.

[Fig. 2.]



Componetur vero hoc modo. Quadratis ex K et ex AE fit aequale quadratum ex EG. et ſuper BG diametro ſcribatur ſemicirculus BCG, ſecans rectam AF productam in L et C; et ducatur CBD vel ex L quoque. dico CD aequalem eſſe dictae K lineae.

Et demonſtratio ex Reſolutione manifeſta eſt. Quod autem ſemicirculus rectam AC ſecabit hinc manifeſtum fiet. Etenim quia K major ponitur dupla diagonali qu.[i] AB, erit ejus qu. majus octo quadratis ex EB, itaque qu. ex EG majus novem qu.[is] ex EB. Quare EG major tripla EB et conſequenter dimidia BG ſive radius deſcripti ſemicirc. major quam EB vel BF. Unde neceſſario circumf. ſecat AC.

„Probl. V". Comparez encore les pages 226—228 du Tome XI où un problème analogue est traité. Les pièces N°. VI, VII, IX et XIII, qui suivent, traitent les problèmes plus généraux qu'on obtient en remplaçant le carré AFBE par un losange. Sur l'origine de ces problèmes on peut consulter la note 2 de la page 239 du Tome XI. Pappus lui-même s'est borné à résoudre celui qu'on trouve à la page 226 du Tome cité. Ghetaldi les a traités tous dans l'ouvrage cité en premier lieu dans la note 5 de la page 126 du T. VIII.

V.[1]

1652.

8 Febr. 1652.

Sit *b* ad *a* ut *cc* ad *ad*, oportet oſtendere eſſe *b* ad *c* ut *c* ad *d*.

$acc \infty abd$[2] *cb* ad *ca* ut *cc* ad *ad*
b ad *c* ut *c* ad *d*

Dicendum. Ratio *b* ad *a* componitur ex ratione *b* ad *c* et *c* ad *a*. Ratio autem quadr.^{i} *cc* ad rectang. *ad* componitur ex ration. *c* ad *d* et *c* ad *a*. Ergo ablata utrinque ratione *c* ad *a*, erit ratio *b* ad *c* eadem quae *c* ad *d*.

Sit *a* ad *b* ut *cd* ad *bn*, oportet oſtend. *a* ad *c* ut *d* ad *n*.

$abn \infty bcd$[3] *ac* ad *bc* ut *cd* ad *bn*
a ad *c* ut *d* ad *n*

Ratio *a* ad *b* compon. ex rat. *a* ad *c* et *c* ad *b*. Ratio vero $\square^{i}$ *cd* ad $\square$ *bn* comp. ex ration. *d* ad *n* et *c* ad *b*. Ablata igitur communi rati.^{e} *c* ad *b*, erit eadem ratio *a* ad *c* quae *d* ad *n*.

---

[1]) Le but de Huygens, en composant cette pièce curieuse, empruntée aux pages 279—281 du manuscrit N°. 12, doit avoir été de se faciliter la rédaction des démonstrations géométriques à la mode des anciens, dont il accompagna ses théorêmes et constructions, trouvées sans doute, pour la plupart, par l'analyse. La pièce rappelle l'ouvrage posthume de Van Schooten „Tractatus de Concinnandis Demonstrationibus Geometricis ex Calculo Algebraïco" de 1661 (voir la note 1, p. 41 du T. III) dans lequel, pour montrer que la méthode synthétique de démontrer est contenue implicitement dans l'Analyse, il apprend à déduire systématiquement de cette dernière les compositions et démonstrations purement géométriques et synthétiques. Ajoutons qu' on trouve une application des algorithmes de la pièce présente dans la pièce N°. XVI, p. 72 du Tome présent.

[2]) Les facteurs *a* des deux termes de cette égalité ont été biffés. Huygens ajouta encore ici en marge: „vel *bd* ad *ad* ut *cc* ad *ad*; ergo $bd \infty cc$; ergo *b* ad *c* ut *c* ad *d*."

[3]) Les facteurs *b* ont été biffés.

vel sic. Ratio a ad b comp. ex rat. a ad d et d ad b. Ratio autem $\square$ cd ad $\square$ bn comp. ex rat.^s c ad n et d ad b. Ergo ablata communi rat.^e d ad b, Erit eadem ratio a ad d quae c ad n et permutando.

Sit $\frac{ab}{c} \infty d + \frac{ef}{g}$ oportet ostendere c ad g ut ab ad $dg + ef$.

Dem. c est ad a ut b ad $d + \frac{ef}{g}$ quae vocetur h, ergo $\square$ $ab \infty \square$ ch. Est autem $\square$ ch ad $\square$^a $dg + ef$ hoc est ad $\square$ hg ut c ad g. Ergo et $\square$ ab ad $\square$ hg hoc est ad $\square$^a $dg + ef$ ut c ad g.

Esto ar ad bc ut c ad q. Oportet ostendere, ar ad cc ut b ad q.

$\frac{bcc}{ar} \infty q.$

Dicendum. ar ad bc ut c ad q. Verum bc ad cc ut b ad c. Ergo ex aequali in proportione perturbata erit ar ad cc ut b ad q. per 23. lib. 5. Elem. [4])

Esto no ad pq ut r ad s. Ostendendum sit, n ad p ut rq ad so. Hoc est, sit ratio composita ex ratione n ad p et ex o ad q eadem quae r ad s, et oporteat ostendere rationem n ad p eandem esse cum ea quae componitur ex ratione r ad s et ex q ad o. Dicendum; quia ratio composita ex n ad p et o ad q eadem est quae r ad s, addita utrimque ratione q ad o, erit composita ex rationibus n ad p, o ad q, et q ad o, hoc est ratio n ad p eadem quae composita ex rat. r ad s et q ad o.

Hyp. n est ad r ut c ad p. Itemque q ad r ut c ad s. Ostendendum quod n ad q ut s ad p.

Quia n ad r ut c ad p, erit $\square$ np aequal. $\square$° rc. Sed eidem $\square$° rc aequale est $\square$ qs, quia q ad r ut c ad s. Ergo $\square$ np aequale $\square$ qs, Ideoque n ad q ut s ad p.

---

[4]) Voir la note 22, p. 304 du Tome XI.

Aliter. Ratio n ad q componitur ex ratione n ad r et r ad q. quarum r ad q eadem cum ratione s ad c, altera vero n ad r eadam quae c ad p. Ergo n ad q rationem habet compoſitam ex ratione s ad c et c ad p, hoc eſt rationem s ad p.

Aliter optimè. Quia n ad r ut c ad p erit invertendo r ad n ut p ad c, verum q eſt ad r ut c ad s. Ergo ex aequo in proportione perturbata [4]) erit q ad n ut p ad s.

Hyp. e ad b ut c ad n. Item a ad b ut c ad l. Et e ad l ut a ad p. Oſtendendum quod $n \infty p$.

Quia e ad b ut c ad n, erit invertendo b ad e ut n ad c. Sed a eſt ad b ut c at l, ergo ex aequo in proportione perturbata [4]) erit a ad e ut n ad l. Sed et a ad e ut p ad l quia erat e ad l ut a ad p. Igitur n ad l ut p ad l quare $n \infty p$.

2 Nov. v. 1652.

Hypoth. $a - \frac{ax}{e}$ ad $\frac{cx}{e}$ ut a ad b Oſtendendum $c + b$ ad b ut e ad x.

perm. et per conv. rat. contr. $\frac{ax}{e}$ ad a ut $b - \frac{cx}{e}$ ad b

sed e ad a ut x ad $\frac{ax}{e}$

ideoque $\frac{ax}{e}$ ad a ut x ad e

ergo x ad e ut $b - \frac{cx}{e}$ ad b

per conv. rat. cont. $e - x$ ad e ut $\frac{cx}{e}$ ad b

ſed e ad c ut x ad $\frac{cx}{e}$

ergo ex aeq. in prop. perturb. $e - x$ ad c ut x ad b

et permt. et comp. e ad x ut $c + b$ ad b

aliter brevius. Sicut $a - \frac{ax}{e}$ ad a ita poteſt oſtendi eſſe $e - x$ ad e. atque erit continuo

$e - x$ ad e ut $\frac{cx}{e}$ ad b

Quod autem ut $a - \frac{ax}{e}$ ad a ita ſit $e - x$ ad e ſic oſtenditur.

e eſt ad x ut a ad $\frac{ax}{e}$

ergo dividendo, e ad $e - x$ ut a ad $a - \frac{ax}{e}$, et invertendo.

8 Nov. 1652.

$bd - bx - xx + dx \infty ax$

x ad $d - x$ ut $b + x$ ad a

x ad d ut $b + x$ ad $a + b + x$

$b + x$ ad x ut $a + b + x$ ad d

$b + x$ ad b ut $a + b + x$ ad $a + b - d + x$

b ad $a + b - d + x$ ut x ad d

Quoniam ductis in ſeſe medijs et extremis non ultra quadratum seu planum aſcenditur, poteſt reſolutio ad finem perduci [5]) per ſolas proportiones, ut hic factum apparet.

$a - x$ ad d ut $xx - bb$ ad $cx - qq$

$xx - bb \infty a - x$ in $\frac{cx}{d} - \frac{qq}{d}$ lineae deſignandam

$xx + \frac{cxx}{d} - \frac{acx}{d} - \frac{qqx}{d} \infty bb - \frac{aqq}{d}$ ſit $\frac{ac + qq}{d} \infty p$

[5]) Huygens n'achève pas complètement la construction, puisqu' ici, et aussi dans le paragraphe qui suit, il s'arrête après avoir réduit le problème à celui de construire la ligne x, déterminée par une proportion $b : (x \pm p) = x : d$. Si c'était son but, comme nous le supposons, de montrer que les problèmes plans peuvent être résolus sans sortir des proportionnalités, c'est-à-dire sans résoudre explicitement une équation quadratique, il aurait pu introduire la longueur q, définie par la proportion $b : q = q : d$, réduire la proportion donnée a la forme: $x : q = q : x \pm p$ et citer enfin la „Prop. XII. Data media trium proportionalium & differentia extremarum, invenire extremas", qu'on trouve dans l'ouvrage de Viète: „Effectionum geometricarum Canonica recensio." (Voir la p. 233 de l'ouvrage cité dans la note 31, p. 10 du T. I). Il nous semble, en effet, que pour expliquer la portée de la dernière partie de la pièce présente, on doit sous-entendre quelque chose de cette nature.

Comparez encore à cet effet la pièce N°. XVI, déjà citée dans la note 1 où, par une série de proportions, analogues à celles du texte, la construction d'un problème plan est réduite à celle de la ligne x, donnée par la proportion $x : s = n : x + m$. Alors Huygens fait suivre une construction bien connue par laquelle il résoud l'équation $xx + xm = ns$; mais dans la démonstration qu'il ajoute, cette construction amène immédiatement la proportion $x : s = n : x + m$, d'où il s'ensuit qu'on peut fonder ces sortes de démonstrations sur les seules proportions.

$xx + \frac{cxx}{d} - px \infty nn$

x ad n ut n ad $x + \frac{cx}{d} - p$

x ad n ut nd ad $dx + cx - dp$

Sit $d + c$ ad d ut p ad q. Ergo $dp \infty dq + cq$

x ad n ut nd ad $dx + cx - dq - cq$

Sit $d + c$ ad d ut n ad f ergo $dn \infty fd + fc$

Et x ad n ut $fd + fc$ ad $dx + cx - dq - cq$

x ad n ut f ad $x - q$.

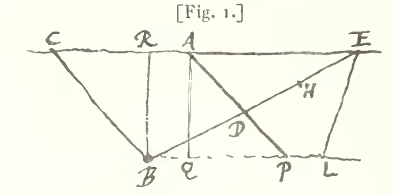
VI.[1])

[1652].

9 Febr. 1652.

Dato angulo EAD et puncto extra ipsum B, ducere inde rectam BDE ut DE sit aequalis datae.

[Fig. 1.]



Sit EA producta et occurrat ei BC parallela AD. et BR ducatur ad eandem perpendicularis. Sitque CA ∞ a; CB ∞ b;[2]) DE ∞ c; CR ∞ d; BE ∞ x. BD $(x - c)$ ad BE (x) ut CA (a) ad CE $\left(\frac{ax}{x-c}\right)$ ergo Δ^{i} CBE latus BC ∞ b, latus BE ∞ x, et CE ∞

---

[1]) La pièce occupe les pages 188—191 du manuscrit N°. 12. Huygens y reprend le problème de la pièce N°. II (p. 13); mais, en choisissant une autre inconnue, il arrive à une équation biquadratique différente. Il la transforme en faisant disparaître le terme avec le cube de l'inconnue, puis il examine le cas particulier où le terme du premier degré s'annule, et où, par suite, le problème devient plan. De cette manière il retrouve le problème traité par lui en 1650 (voir la page 239 du Tome XI), qu'il emprunta alors à l'aperçu, donné par Pappus, de l'ouvrage „De inclinationibus" d'Apollonius (voir la note 2 de la même page 239). Il en obtient une solution bien plus élégante qu'on retrouve avec une légère modification dans sa lettre à van Schooten du 23 oct. 1653 (p. 247 du T. I) et dans les „Illustrium quorundam problematum constructiones" de 1654 (Probl. VI). Comparez encore la note 10 de la pièce présente.

[2]) Les données ont évidemment été choisies de manière à mener facilement au cas où le parallelogramme CP est un losange; auquel cas le problème se réduit à un problème plan comme Pappus l'avait remarqué dans le passage cité dans la note 2 de la page 239 du T. XI.

$\propto \frac{ax}{x-c}$ unde additis qu.is BC, CE, ablatoque hinc qu.° BE, relinquoque divifo per duplam CE orietur fegmentum bafis CR

$$\frac{\frac{aaxx}{xx-2cx+cc}+bb-xx}{\frac{2ax}{x-c}} \propto d \text{ CR}$$

et tandem $x^4 - 2cx^3 \left.\begin{array}{l}-aa\\-bb\\+cc\\+2ad\end{array}\right\} xx \left.\begin{array}{l}+2bbc\\-2acd\end{array}\right\} x - bbcc \propto 0$ et fublato fecundo termino, ponendo nimirum $y + \frac{1}{2}c \propto x$ erit poft inftitutam operationem

$$y^4 \propto \left.\begin{array}{l}+\frac{1}{2}cc\\+aa\\+bb\\-2ad\end{array}\right\} yy \left.\begin{array}{l}-bbc\\+aac\end{array}\right\} y \left.\begin{array}{l}-\frac{1}{16}cc\\+\frac{1}{2}ad\\+\frac{1}{4}aa\\+\frac{1}{4}bb\end{array}\right\} cc$$

apparet hinc quod fi $bb \propto aa$ evanefcat affectio fub y, quodque propterea fit futura aequatio quadrata, cum autem $a \propto b$ tum AB rhombus eft, et mutatis ubique b in a erit hujufmodi aequatio

$$y^4 \propto \left.\begin{array}{l}+\frac{1}{2}cc\\+2aa\\-2ad\end{array}\right\} yy \left.\begin{array}{l}-\frac{1}{16}cc\\+\frac{1}{2}ad\\+\frac{1}{2}aa\end{array}\right\} cc \quad \text{unde invenitur}$$

$$yy \propto aa - ad + \tfrac{1}{4}cc + \sqrt{aacc + a^4 - 2a^3d + aadd}\ ^{3)}$$

five

$$yy \propto aa - ad + \tfrac{1}{4}cc + a\sqrt{cc + aa - 2ad + dd}.$$

Dividatur DE bifarium in H ergo BH eft y.[4]) Et ducatur EL quae faciat angulum BEL aequalem angulo BPA. erunt jam anguli ELP et EDP duobus rectis aequales,[5]) et puncta ideo D, P, L, E, in circulo[6]) et rectang. LBP aequ.

---

[3]) Comme on le voit, la seconde racine n'est pas discutée. Toutefois elle peut prendre une valeur positive. Elle mène alors aux solutions où le segment DE $= c$ se trouve a l'intérieur de l'angle CAP.

[4]) Puisqu'on a posé $y + \frac{1}{2}c = x$ et que BE $= x$, HE $= \frac{1}{2}c$.

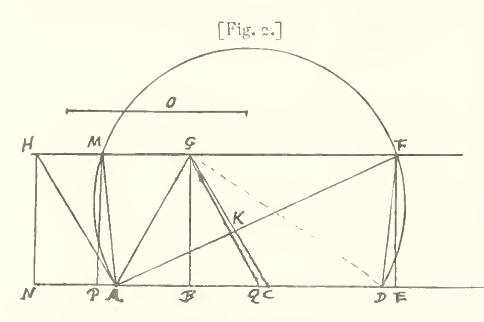
[5]) Puisqu'il en est de même par construction des angles LPA et BEL.

[6]) Ce cercle une fois tracé, Huygens, pour obtenir sa nouvelle construction, n'a plus qu'à inter-

▭° EBD. Subtrahe jam qu. DH ∞ $\frac{1}{4}cc$ ex qu.° BH ∞ $aa - ad + \frac{1}{4}cc + a\sqrt{cc+aa-2ad+dd}$ erit reliquum □ BD + 2 ▭ BDH, quae ſimul aequalia ▭° EBD ergo ▭ EBD ſeu LBP ∞ $aa - ad + a\sqrt{cc+aa-2ad+dd}$. aufer qu. BP ∞ aa ſit ▭ LP B ∞ $a\sqrt{cc+aa-2ad+dd} - ad$. divide per BP ∞ a ſit PL ∞ $\sqrt{cc+aa-2ad+dd} - d$ ſit AQ parall. RB ergo PQ ∞ d, [7]) adde PQ erit QL ∞ $\sqrt{cc+aa-2ad+dd}$. hoc eſt QLq. ∞ □ DE data una cum qu. BQ nam hoc eſt $a - d$.

Nota aliquam differentiam hic inveniri cum tam exigua datur DE vel tam acutus angulus APB ut L cadat inter B et P.

[Fig. 2.]



Compoſitio erit hujusmodi, Sit datus rhombus HGCA [Fig. 2] et linea *o*. *Cadat GB perpendicularis in AC. Et ſumatur BD quae poſſit duo ſimul quadrata, ex* o *et ex AB.* [8]) Tum ſuper AD deſcribatur circumferentiae pars quae ſit capax anguli GHA. et ad interſectionem F ducatur AF, dico KF ipſi *o* aequalem eſſe. [9])

Jungantur [10]) enim AM, FD et ducantur HN, MP, FE parallelae GB.

préter geométriquement la formule algébrique qui précède; mais on peut se demander d'où la pensée lui est venue d'introduire ce cercle, ou, ce qui revient au même, de tirer la droite auxiliaire LE? Il nous semble probable qu'ayant calculé $y^2 = BH^2$, Huygens a remarqué qu'il connaissait aussi $BD \times BE = y^2 - \frac{1}{4}c^2$; donc, faisant passer un cercle par les points D, E et P, le point d'intersection L de ce cercle avec BP était connu; puisqu'on a $BP \times BL = BD \times \times BE$. Mais, de plus, l'angle DEL était le supplément de l'angle APL qui lui est opposé dans le quadrilatère inscrit DPLE. Il était donc connu, et on pourrait trouver le point E en menant par les points connus B et L un arc de cercle contenant l'angle BEL = ACB. Il ne s'agissait donc plus que de calculer PL et d'en déduire une construction élégante et simple du point L.

[7]) Puisque PQ = CR = d.

[8]) Huygens a souligné les phrases cursivées et il a ajouté en marge: „vel ſit qu[is] ex *o* et AG aequale qu. GD"; c'est la modification adoptée également dans la lettre à van Schooten et dans les „Illustrium quorundam problematum constructiones." Voir la note 1.

[9]) On reconnaîtra la construction, annoncée dans la note 6, du point L de la Fig. 1; en effet, les points A, H, G, C, B et D de la Fig. 2 correspondent aux points B, C, A, P, Q et L de la Fig 1.

[10]) Comme on le verra dans la suite, la démonstration, qui va suivre, a besoin d'être suppléée sur quelques points. Aussi Huygens n'en a pas considéré la rédaction comme définitive. Au dernier alinéa il indique un changement radical qu'il y voudrait apporter; mais, de plus, on

Quod verò circumferentia ſecabit rectam HF ſic fiet manifeſtum.

Sit BQ ∞ BA et jungatur GQ, itemque GA. Itaque trianguli GAQ duo anguli A et Q inter ſe aequales ſunt et ſinguli angulo A vel G trianguli HAG, quare ſimilia erunt △ª HAG, GAQ et angulus AGQ aequ. angulo AHG. Si itaque ſuper AQ deſcriberetur circumferentia ſimilis circumf.ᵃᵉ AMFD [11]) ea per G tranſiret et tangeret rectam HF; ſed quoniam qu. ex BD aequale eſt quadratis ex AB ſeu BQ et ex *o*, erit BD major BQ, et AD major AQ, ergo neceſſario circumferentia AMFD ſecabit rectam HF.

Porro quia ang. FDA aequ. angulo AKC (nam uterque addito FKC aequatur 2 rectis [12])) diſtantque tantum inter ſe lineae HF, AE quantum HA, GC, erit ideo FD ∞ AK. Sed et MA ∞ FD ergo MA quoque ∞ AK, et △ AMH idem cum △° AKC [13]) utraque vero ſimilia △ˡᵒ ADF. Ergo ut HM ad MA, hoc eſt ut NP ad FD ita FD ad DA. Quare contentum ſub NP, AD aequ. qu. DF; et addito utrinque □° PAD ſeu ADE, erit □ NAD aeq. qu. FD et □° ADE.

Et ſumptis omnium duplis erit duplum □ NAD aequ. duplo qu. FD et duplo □ ADE. Et addito communi qu. AD erit geminum □ NAD + qu. AD hoc eſt geminum □ ſub BC, AD + q. AD (nam BC ∞ AD [14])) aequale duplo qu. FD + q. AD + 2 □ ADE. Sed haec ſimul aequantur qu. AF + qu FD, (nam duplum □ ADE + qu. AD + qu. DF aequantur qu. AF [15])) Ergo duplum □ ſub BC, AD + q. AD aequale qu.° AF + q. FD, hoc eſt, qu.° AF + q. AK, nam diximus FD AK eſſe aequales inter ſe. □ verò ſub CB, AD una cum □ BAD aequatur □° CAD, et dupla duplo; ergo ſi à qu. AD + duplo □ ſub BC, AD, auferatur duplum □ CAD, relinquetur qu. AD cum defectu dupli □ BAD. Duplo autem □° CAD aequale eſt duplum □ KAF, quia puncta KCDF ſunt in circuli ejuſdem circumferentia. et erat qu. AF + qu. AK aequale qu. AD +

trouve dans le manuscrit N°. 12, aux pages 245 et 246, une rédaction nouvelle, datée du 19 octobre 1653, qui a passé, avec des modifications très peu importantes, dans les „Ill. quor. probl. constr." au „Probl. VI" et pour laquelle nous renvoyons à cet ouvrage de 1654, que nous reproduisons plus loin dans ce Tome.

[11]) C'est-à-dire, contenant le même angle.

[12]) Puisque les points K, F, D, C, correspondants aux points D, E, L, P de la Fig. 1, se trouvent sur une même circonférence de cercle; ce qui se démontre facilement en remarquant que par construction ∠AFD = ∠GHA = ∠ACG = 180° — ∠GCD.

[13]) Puisqu'on a non seulement MA = AK et ∠AKC = ∠ADF = ∠MAD = ∠HMA; mais encore ∠AHM = ∠ACK.

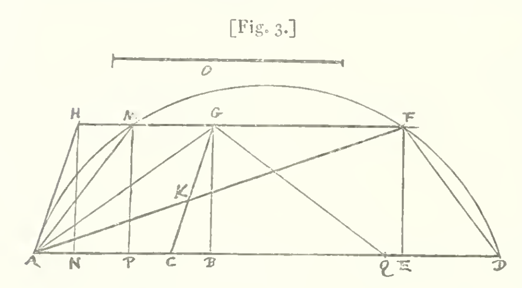
[14]) Lisez AN.

[15]) Huygens ajoute en marge: 12.2 Elem. „In amblygoniis triangulis, quadratum, quod fit à latere angulum obtusum subtendente, maius est quadratis, quae fiunt à lateribus obtusum angulum comprehentibus, rectangulo bis comprehenso & ab vno laterum, quae sunt circa obtusum angulum, in quod, cum protractum fuerit, cadit perpendicularis, & ab assumpta exterius linea sub perpendiculari prope angulum obtusum". (Clavius, p. 192).

+ 2 ▭ ſub BC, AD. Ergo ablato duplo ▭ KAF à qu. AF + q. AK hoc eſt ablato ▭ AKF [16]) + q. AK à qu. AF, reſtabit qu. KF aequale qu. AD minus 2 ▭ BAD, ſeu minus 2 ▭ ABD et 2 q. AB; quare addito utrimque quadrato AB, erit qu. KF + qu. AB aequale qu. AD minus 2 ▭ ABD minus qu. AB : hoc eſt qu° BD. Sed eidem qu.° BD eſſet aequale ex conſtr. qu. ex o + q. AB. Ergo haec duo quoque aequalia qu.is duobus KF et AB; et ablato communi AB q. erit qu. ex o aequ. q. KF. quod erat demonſtrandum. Poteſt autem angulus FDA vel rectus vel acutus fieri in quibus caſibus vel facilior vel non multum à praecedenti differens dem.° obtinebit.

Alter caſus cum angulus rhombi C obtuſus eſt, eandem habet compoſitionem. Et demonſtrationem quoque parum diverſam, quae erit hujusmodi, mutatis tantum ſignis affectionis ubi opus erit.

[Fig. 3.]



Primum quidem ſicut modo oſtenditur id quod ſub NP, AD [Fig. 3] continetur aequari quadrato DF. [17]) unde detrahendo utrumque à rectang. PAD vel ADE, erit ▭ NAD ∞ ▭ ADE — q. FD; et ſumptis omnium duplis, duplum ▭ NAD ∞ 2 ▭ ADE — duplo q.° FD. et utrumque abſtrahendo à qu.° AD, erit qu. AD — duplo ▭ NAD ∞ qu. AD + duplo q.° FD — 2 ▭ ADE; ſed haec ſimul aequantur qu.is ex AF et FD, (nam qu.a. ſimul AD, DF — 2 ▭ ADE aequalia ſunt qu.° AF per. 13. 2i Elem. [18]) Ergo qu. AD minus duplo ▭ NAD aequale eſt qu.is AF et FD, hoc eſt, qu.is AF et AK, nam FD ∞ AK oſtenſa eſt. [19]) detrahendo igitur aequalia ab aequalibus, hoc eſt illinc auferendo 2 ▭ CAD, hinc vero duplum ▭ KAD [20]) (haec enim aequalia inter ſe, quoniam puncta D, C, K, F in ejuſdem circuli circumferentia) erunt etiam reſidua aequalia. Sed à qu°. AD — 2 ▭ NAD ſeu — 2 ▭ CB, AD, ſi auſe-

[16]) Liſez : 2 ▭ AKF.

[17]) Voir le troisième alinéa de la page précédente vers la fin.

[18]) „In oxygoniis triangulis, quadratum à latere angulum acutum ſubtendente minus est quadratis, quae fiunt à lateribus acutum angulum comprehendentibus, rectangulo bis comprehenso, & ab vno laterum, quae sunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & ab assumpta interius linea sub perpendiculari prope acutum angulum." (Clavius, p. 198).

[19]) Voir l'alinéa cité dans la note 17.

[20]) Lisez KAF.

ratur insuper 2 □ CAD, relinquetur qu. AD — 2 □ BAD. At à qu.is FA, et AK auferendo 2 □ KAF, relinquetur qu. KF. Itaque qu. KF aequale qu.° AD — 2 □ BAD, hoc est qu.° AD — 2 □ ABD — 2 q. AB. quare addendo utrinque qu. AB erit qu. KF + qu. AB ∞ qu. AD — 2 □ ABD — qu. AB; Sed hoc residuum est aeq. qu.° BD. ergo qu. KF + qu. AB ∞ qu. BD, hoc est qu.° ex *o* et qu. AB. Itaque auferendo commune qu. AB, erit qu. KF. aequ. q.° ex *o*. quod erat ostend.

Haec autem proponentur melius eo modo quo problematis partem alteram trademus, [21]) Primum videlicet tale theorema demonstrando.

Si sit rhombus HACG et ex angulo A ducatur AKF ad productum latus HF, et FD faciens angulum AFD aequalem angulo H, et GB perpendicularis ipsi AD. dico quadrata ex KF et ex AB quadrato BD aequalia esse.

Hoc primum demonstrare oportuit, dein Resolutionem Compositionemque et demonstrationem problematis subjicere quae breves erunt. et schema habebunt minus implicitum. quod et Pappus in prop.e 72. lib. 7, rectè observavit. [22])

[21]) Voir la pièce N°. VII, qui suit.

[22]) En effet, au lieu cité, p. 206 verso de l'édition de Commandin citée p. 259 du T II, note 3 (Hultsch, T. II, p. 783), Pappus dans la démonstration de la construction correspondante, où le losange est remplacé par un carré (voir cette construction à la page 227 du Tome XI), fait appel à un lemme qui, avec les notations de la figure 3 de la page 228 du T. XI, et après y avoir tiré la droite HS, se lit comme il suit dans la traduction latine de Commandin: „Sit quadratum BD, & ducatur BGH, atque ipsi ad rectos angulos HS. Dico quadrata ex CD GH quadrato ex CS aequalia esse." Et ce théorème est démontré par Pappus dans la „Prop. 71. lib. 7," p. 206 recto de l'édition de Commandin (Hultsch, T. II, p. 780—783).

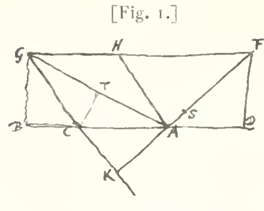
VII. [1]

1652.

11 Febr. 1652.

dato rhombo GHAC productisque lateribus GH, GC, oportet ducere KAF aequalem datae. [2])

[Fig. 1.]



Factum sit et dividatur KF bifariam in S. et ducatur GA diameter. Sitque GH, GC ∞ a. GA ∞ b. KF ∞ c. AS ∞ x. [3])

$$\text{KA}\left(\tfrac{1}{2}c - x\right) \text{ — AC}(a) \qquad \text{KF}(c) \text{ — FG}\left(\frac{ac}{\tfrac{1}{2}c - x}\right)$$

$$\text{AF}\left(\tfrac{1}{2}c + x\right) \text{ — AH}(a) \qquad \text{KF}(c) \text{ — KG}\left(\frac{ac}{\tfrac{1}{2}c + x}\right)$$

a[dde] $\left\{ \begin{array}{ll} \square \text{KAF} & \tfrac{1}{4}cc - xx \\ \square \text{GA} & bb \end{array} \right.$

$$\tfrac{1}{4}cc - xx + bb \;\infty\; ^{4)} \; \square \text{KGF} \; \frac{aacc}{\tfrac{1}{4}cc - xx} \; ^{5)}$$

---

[1]) La pièce occupe les pages 192—196 du manuscrit N°. 12.

[2]) Comparez le problème analogue de la pièce N°. VI.

[3]) Huygens profite de l'expérience qu'il a obtenue dans la pièce précédente pour choisir l'inconnue dès l'abord de telle manière qu'elle amènera une équation où le terme avec le cube de l'inconnue a disparu. En effet, l'AS ∞ x est analogue a la BH ∞ y de la pièce précédente.

[4]) Puisque GA est la bisectrice de l'angle CGH et qu'on a alors, d'après un théorème bien connu, KG × GF = KA × AF + GA².

$$\tfrac{1}{16}c^4 - \tfrac{1}{2}ccxx + x^4 - bbxx + \tfrac{1}{4}ccbb \infty aacc$$

$$x^4 \infty \left.\begin{matrix}\tfrac{1}{2}cc\\ +bb\end{matrix}\right\} xx \quad \left.\begin{matrix}+aa\\ -\tfrac{1}{4}bb\\ -\tfrac{1}{16}cc\end{matrix}\right\} cc \qquad \text{quadrata aequatio.}$$

q.AS $xx \infty \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}bb - a\sqrt{cc + \frac{\frac{1}{4}b^4}{aa}}$ subſtrahe ex quadrato SF ∞ $\frac{1}{4}cc$ reſtat $-\frac{1}{2}bb + a\sqrt{cc + \frac{\frac{1}{4}b^4}{aa}} \infty$ ▭ KAF.

Sit ducta FD, faciens angulum AFD aequalem angulo ACK [6]) et conſequenter △los ſimiles CAK, FAD. ergo ▭ CAD ∞ ▭ KAF. applicando itaque ▭ KAF ad CA ∞a fit AD $\infty -\frac{1}{2}\frac{bb}{a} + \sqrt{cc + \frac{\frac{1}{4}b^4}{aa}}$. Sit GB perp. in AC et

[5]) Huygens ajoute ici sur une bande de papier attachée à la page:

p

„$\frac{1}{4}cc - xx$ — aa — cc — $\frac{1}{4}cc - xx + bb$

applicentur omnia ad a hoc eſt ſit $\frac{\frac{1}{4}cc - xx}{a} \infty q$ (AD). $\frac{cc}{a} \infty p$. $\frac{bb}{a} \infty d$ (2AB)

ergo q — a — p — $q + d$

$qq + qd \infty ap$ ſive cc adde $\frac{1}{4}dd$

$qq + qd + \frac{1}{4}dd \infty cc + \frac{1}{4}dd$

$q + \frac{1}{2}d \infty \sqrt{cc + \frac{1}{4}dd}$"

et de même, sur le revers de la bande:

„melius.

$\frac{1}{4}cc - xx$ — aa — cc — $\frac{1}{4}cc - xx + bb$

Sit $\frac{\frac{1}{4}cc - xx}{a} \infty q$ (AD). $\frac{bb}{a} \infty d$ (2 AB) ſive $ad \infty bb$

ergo q — a — cc — $qa + da$

Sed q — a — $qq + qd$ — $qa + da$

Ergo $cc \infty qq + qd$"

Il nous semble que ces variantes ont le but d'éviter l'introduction de l'équation biquadratique. Et la seconde est préférée à la première parce qu'elle ne nécessite pas d'introduire la longueur p, qui ne correspond avec aucune des lignes de la figure.

[6]) Par analogie avec la droite EL de la Fig. 1, p. 26. Voir sur cette droite EL la note 6, p. 27.

CT in GA. Ergo ſimilia triangula CAT, GAB ſed CA eſt a, AT $\frac{1}{2}b$, AG b, ergo AB $\frac{1}{2}\frac{bb}{a}$. ergo cum AD ſit $\sqrt{cc + \frac{1}{4}\frac{b^4}{aa}} - \frac{1}{2}\frac{bb}{a}$, additâ AB $\infty \frac{1}{2}\frac{bb}{a}$, erit DB ∞ $\infty \sqrt{cc + \frac{1}{4}\frac{b^4}{aa}}$, hoc eſt DB qu. ∞ □ KF datae una cum qu.° AB.

Unde talis invenitur problematis conſtructio. *Oportet demiſſâ perpendiculari GB facere BD quae poſſit quadr. lineae datae una cum qu. ex AB. tum ſuper AD, describere circumferentiae partem quae capiat angulum aequalem angulo CGH. Ea enim ſecabit rectam GH productam in F, unde ducta FAK aequabitur datae lineae. Sed et in alio puncto ſecabit eandem GF inter H et F, cujus ope interſectionis problema itidem abſolvetur.* [7])

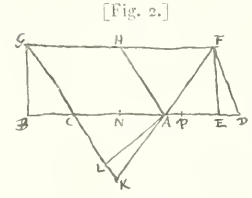
THEOREMA. [8]) [1.]

Sit rhombus GCHA et ducatur KHF [9]) *occurrens productis rhombi lateribus utrinque. et ducatur FD quae faciat angulum AFD aequalem CGH, et ſit GB perpendicularis ſuper AC.*

dico quadrata ex KF et AB aequari qu.° ex BD.

Sit enim AL ſuper GK ad angulos rectos ducta et FE ſuper BD. et ponatur AP quidem aequalis ED; AN vero ipſi CB.

[Fig. 2.]



Quia igitur ſimiles ſunt trianguli GBC, ACL, et latus GC aequale AC lateri, erit quoque CL aequale CB hoc eſt AN. Rurſus quoniam ſimilia ſunt △ la CAK, FAD, habent enim angulum ad A aequalem et eſt angulo ACK ex conſtr. aequalis angulus AFD, erit et angulus AKC aequ. ang.° ADF. anguli autem ALK, FED ſunt recti, itaque ſimilia quoque triangula ſunt ALK, FED. ſed FE eſt aequ. AL ergo et AK aequ. FD et LK aequalis ED hoc eſt AP. itaque tota NP etiam aequalis CK. Propter ſimilia verò triangula, eſt AD ad DF ut AK ad KC. ſed AK aequalis eſt FD et KC aequalis NP. Itaque AD ad DF ut DF ad NP, ideoque contentum ſub AD, NP aequale qu.° FD et auferendo utrinque ▭ DA, AP vel AD, DE erit ▭ NAD aequale qu.° FD — ▭ ADE. Et ſumptis omnium duplis, duplum ▭ NAD ∞ duplum qu. DF — 2 ▭ ADE et addito communi qu° AD, erit duplum

[7]) On retrouve cette construction avec une légère modification dans la lettre à van Schooten du 23 oct. 1653 (p. 248—249 du T. I) et dans les „Illustrium quorundam problematum constructiones” de 1654 (Problema VII, première solution); voir la note 14.

[8]) Comparez les trois derniers alinéas de la pièce précédente, p. 31 du Tome présent.

[9]) Lisez KAF.

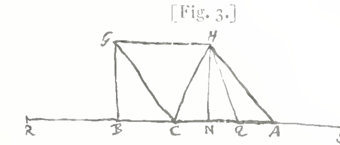
□ NAD hoc eſt duplum □ BC, AD + qu. AD ∞ 2 qu. FD + qu. AD — — 2 □ ADE; ſed haec aequalia ſunt qu.^is ex AF et FD (nam qu.^a ex FD et DA — — 2 □ ADE aequantur qu.° AF [10])). Itaque 2 □ BC, AD + qu. AD ∞ qu^is ex AF et FD, hoc eſt qu^is ex AF et AK, nam AK ipſi FD aequalis oſtenſa eſt. Additis itaque aequalibus ad aequalia, hoc eſt addendo illic 2 □ CAD hinc vero 2 □ KAF (ſunt autem haec aequalia, quoniam propter △^a ſim. eſt CA ad AK ut FA ad AD) erunt etiam ſummae aequales. Sed addendo ad 2 □ BC, AD + qu. AD, duplam □ CAD fit 2 □ BAD + qu. AD. at qu.^is ex FA et AK addendo duplum □ KAF fit qu. KF; ergo qu. KF aequale 2 □ BAD + qu. AD. additoque utrinque qu. BA, erit qu. KF + qu. BA aequale qu°. BD. quod erat oſtendendum.

Poteſt autem rurſus angulus FDA rectus vel obtuſus eſſe, prout fuerit angulus FKC. ijſque caſibus non multum diverſa demonſtratione idem oſtendetur facilius quidem multò ſi angulus FDA rectus fuerit.

THEOREMA. 2. [11])

Sit rurſus rhombus GCAH, cujus ducatur diameter HC, et in productum latus AC cadat perpendicularis GB, porro ſit HQ poſita aequalis HC, et ponatur BS quae poſſit quadratum ex BA una cum quadruplo qu.^i ex CH. Dico AS ipſi CQ aequalem eſſe.

[Fig. 3.]



Sit enim HN ipſi CQ ad ang. rectos. quia igitur CHQ eſt triangulum iſoſceles erit CQ biſariam diviſa in N. Ponatur BR ipſi BN aequalis, eritque jam utraque harum aequalis ipſi GH hoc eſt CA. Quia verò ſunt ſimilia triangula CGH, CHQ, nam angulis GCH, GHC aequales ſunt ſinguli HCQ, HQC; erit QC ad CH ut CH ad CG, et qu. CH aequale □ ſub GC, CQ hoc eſt □ ſub BN, CQ, hoc eſt duplo □° BNQ, hoc eſt □° RNQ, ſeu RNC.

Eſt autem qu. BA hoc eſt qu. RC una cum duplo □° RCQ + qu. CQ aequale quadrato RQ. Sed duplum □ RCQ + qu. CQ aequatur quadruplo □° RNC, nam □ RCQ aequatur duplo □ RCN, et qu^m. CQ quatuor qu.^is CN. Itaque addito ad qu. BA quadruplo □ RNC hoc eſt 4 qu.^is CH erunt ea ſimul aequalia qu.° RQ; ſed ijſdem aequale poſitum eſt qu. BS, ergo BS q. ipſi RQ

[10]) Huygens ajoute en marge „12.2. Elem." Voir la note 15, p. 29.

[11]) Le théorème sert à préparer la démonstration de ce qu'on appelait la „Determinatio" (voir p. e. l'avant-dernier alinéa de la page 231 du Tome XI), laquelle, dans le problème présent, exige que la ligne donnée *o* (voir la figure 4) soit plus grande que le double de HC; puisque sans cela la construction devient impossible.

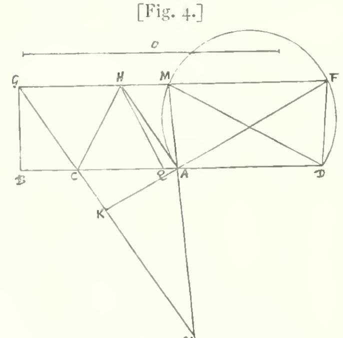
qu.° aequale: et BS ipſi RQ. Quare ablata communi BQ erit QS aequalis RB hoc eſt ipſi CA; et rurſus communi ablata QA, erit AS aequalis CQ; quod erat demonſtrandum.

PROBLEMA. [12])

Rhombo dato et duobus lateribus contiguis productis, aptare ſub eorum angulo interiori magnitudine datam rectam lineam quae ad oppoſitum angulum pertineat. debet autem data linea non minor eſſe duplâ diametro, quae alios duos rhombi angulos jungit.

Eſto Rhombus GHAC [Fig. 4] [13]), et producta ejus latera GH, GC; data autem ſit linea *o*, quae major ſit dupla diametro HC, nam ſi aequalis eſt duplae HC conſtructio problematis manifeſta eſt. Sit itaque major et oporteat ducere KAF ipſi *o* aequalem.

[Fig. 4.]



Sit GB ipſi AC ad angulos rectos et qu.is ex BA, et ex o ſit aequale ex BD quadratum. [14]) Dein ſuper AD deſcribatur circumferentiae pars capax anguli CGH, quae ubi rectam GH productam ſecabit, inde ducantur FAK, MAV dico harum utramque aequale eſſe ipſi *o*.

Quod autem dicta circumferentia ſecabit rectam GH productam ſic prius oſtenditur. Sit HQ ipſi HC aequalis. Quia igitur qu. ex BD aequale eſt qu.is ex *o* et BA; quorum qu. *o* majus eſt 4 qu^is ex CH, erit ideo AD major quam CQ. hoc enim in praec. Theor. oſtenſum fuit. Sed et triangulum CHQ ex eodem theoremate conſtat ſimilem eſſe triang. CGH, et iſoſcelem. Itaque ſi ſuper CQ circumferentiae pars deſcripta intelligatur, capax anguli CGH, ea tranſibit per H, atque ibidem continget rectam GH, ſimilis autem erit circumferentiae quae ſuper AD deſcripta fuit, nam illa quoque capit angulum aequalem ipſi CGH. Ergo quum ſit AD major quam CQ, manifeſtum eſt circumferentiam AMFD ſecare debere rectam GHF.

---

[12]) Après avoir préparé la solution par les théorèmes qui précèdent, Huygens reprend le problème formulé au début de la pièce en y ajoutant la „Determinatio."

[13]) Le manuscrit contient une cinquième figure qui se distingue de la quatrième en ce que l'angle CAH y est l'angle obtus du losange. Le texte se rapporte à la fois aux deux figures.

[14]) Huygens a souligné cette phrase et il a ajouté en marge: „Vel potius sit qu.is ex *o* et HC aequale quadratum ex GD." C'est la modification adoptée dans les „Illustrium quorundam problematum constructiones" et dans la lettre à van Schooten; voir la note 7.

Porro autem ductis MD, FD, constat quidem angulos AFD, AMD singulos aequari angulo CGH. Quapropter erunt qu.^{a} ex KF et AB simul aequalia qu.^{o} BD;[15] sed huic etiam aequalia sunt ex constr.^{e} qu.^{a} ex *o* et ex AB. Ergo quae eidem aequalia etiam aequalia inter se. Et ablato communi quadrato ex AB erit qu. KF aequale qu.^{o} ex *o* et KF ipsi *o*. Eadem ratione et qu. MV quadrato ex *o* aequale erit. Quod demonstrandum erat.[16]

[15]) Voir le théorème I de la pièce présente.

[16]) Une autre démonstration se rencontre plus loin dans le manuscrit N°. 12, aux pages 247 et 248, sous la susscription: „Ex Analysi (11 Febr. 1652) suprà descripta". Elle a passé avec des modifications légères dans les „Ill. quor. probl. constr.", où on la trouvera au „Probl. VII."

VIII.[1]

1652.

14 Febr. 1652.

Pappus in principio libri 7.[i] ubi de Inclinationibus, problema universale refert.[2]) Duabus lineis positione datis inter ipsas ponere rectam lineam magnitudine datam, quae ad datum punctum pertineat. Quod quidem problema solidum est nisi cum ductis ex puncto dato parallelis ad datas lineas positione, quadratum vel rhombus constituitur. Quos casus jam exposuimus,[3]) et quomodo optimè construantur docuimus. Cum verò solidum est, unam quidem problematis partem resolvit Pappus prop.[e] 31 libri 4.[i] [4]) ubi angulum trifariam secare docet.[5]) aliorum tamen inventa proponens.[6]) Quamquam autem parallelogrammum rectan-

---

[1]) Dans cette pièce, empruntée aux pages 197—199 du manuscrit N°. 12, Huygens reprend (voir les pièces N°. II et N°. VI, pp. 13 et 26) le problème solide de mener par un point donné B [Fig. 1] une droite sur laquelle les côtés d'un angle donné CNA découpent un segment RD de longueur donnée. Cette fois il traite le cas où le point donné se trouve à l'intérieur de l'angle donné et le résoud à l'aide d'une hyperbole, coupée par un cercle. Ensuite il s'occupe de la „determinatio" du problème, c'est-à-dire, de la détermination des conditions sous lesquelles la solution est possible; ce qui amène un autre problème solide: celui de trouver la longueur minimale du segment découpé RD.

[2]) Voir la note 2, p. 239 du Tome XI. Dans l'édition de Hultsch on trouve le passage en question au T. II, p. 670—671.

[3]) Voir les pièces N°. IV (p. 19), VI (p. 26) et VII (p. 32).

[4]) Consultez la note 9, p. 228 du Tome XI. Chez Hultsch on trouve la proposition indiquée au T. I, p. 272—275.

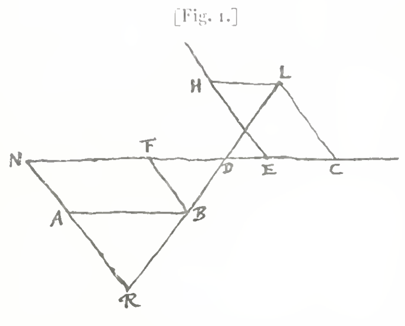
[5]) Voir la „Prop. 32" où Pappus applique la construction de la proposition 31 mentionnée à la trisection de l'angle (p. 62 recto et verso de l'édition de Commandin; Hultsch T. I, p. 274—277).

[6]) Allusion aux phrases suivantes qui précédent chez Pappus les „Prop. 31 et 32": „antiqui Geometrae problema jam dictum in angulo," [la trisection de l'angle] „quod natura solidum est, per plana inquirentes invenire non potuerunt. nondum enim ipsis cognitae erant coni

gulam conſtituat, eâdem tamen ratione ope hijperboles componitur, etiamſi rectangulam non ſit. [7]) Nunc autem eum caſum pertractabimus cum punctum intra angulum datum eſt, nam et is ope hijperboles expediri poteſt. Sed et aliam pro rhombo conſtructionem hinc deducemus. [8])

Eſto angulus N et intra ipſum detur punctum B, oporteatque ducere RBD datae lineae aequalem. Factum jam ſit, et ducantur BA, BF parallelae ipſis NF, NA, et poſita FE ipſi FN aequali, ſit quoque EH parallela NA. Producatur autem RD et ut ipſi RD aequalis BL et ducantur LH, LC ipſis quoque NF, NA parallelae.

[Fig. 1.]



Similia igitur conſtat fieri △la LDC, RBA. Sed latus LD aequale eſt lateri RB, quoniam tota BL toti DR aequalis: Itaque et LC aequalis ipſi AR, et CD aequalis ipſi AB ſeu NF, hoc eſt, ipſi FE. et ablata communi DE, erit EC aequalis DF. Ut autem DF ad FB ita eſt BA ad AR. Ergo quum ipſi FD ſit aequalis EC et ipſi AR aequ. LC hoc eſt HE erit quoque ut EC ad FB ita BA ad HE. quare contentum EC, HE aequale contento FB, BA. Eſt itaque punctum L ad hijperbolen ſed et ad circuli circumferentiam, nam datum eſt B punctum, et data BL aequalis ipſi RD. datum igitur eſt poſitione punctum L; dataque propterea etiam linea LB quare et DBR poſitione data erit, nam cum illa coincidit.

Componetur autem hoc modo. Ductâ EH ut in reſolutione dictum eſt, jungatur BE [Fig. 2], eaque producatur et ſit ipſi EB aequalis EG. Dein per punctum G, circa asymptotos EH, EK deſcribatur hijperbole LG. Centro autem B et ſemidiametro BL quae aequalis ſit lineae datae, deſcribatur circumferentia LO. quae ſi hijperbolen non attingit, problema conſtrui non poterit, quod data linea ſit aequo brevior.

Si vero contingat circumferentia LO hijperbolen LG, erit linea data omnium quae problema efficere poſſunt breviſſima ſin denique circumferentia hijperbolen

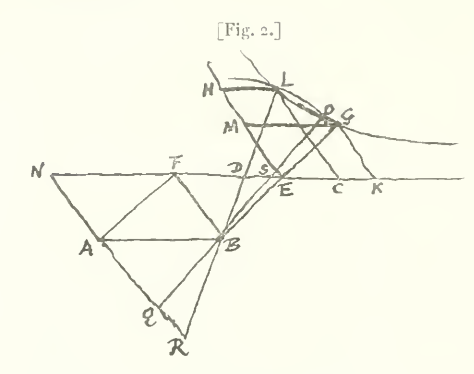
sectiones, & ob eam causam hesitarunt. Postea uero angulum tripartito diuiserunt ex conicis, ad inuentionem infrascripta inclinatione" [la prop. 31] „utentes". (Commandin, p. 61 recto; Hultsch, T. I, p. 273).

[7]) En effet, le raisonnement de Pappus, reproduit dans la note 9, p. 228 du Tome XI, reste valable quand on remplace, dans la figure 1 de la page 226, les rectangles ABCD et AK par des parallélogrammes. Seulement l'hyperbole décrite par le point K ne sera plus équilatère.

[8]) Voir pour la solution en question la pièce N°. IX, qui suit.

fecet, ut hìc in punctis L et O, ducantur inde rectae LBR, OBQ, dico partes earum interceptas DR, SQ problema efficere, hoc est aequales esse ipsi BL, seu lineae datae.

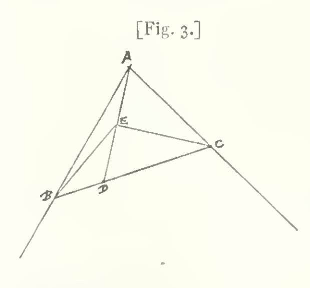
[Fig. 2.]



Ducantur enim HL, LC ipsis EK, EH parallelae, sicut et GM, GK. Quia igitur EG ipsi EB hoc est ipsi FA aequalis est, manifestum quoque aequale esse et simile parallelogr. MGKE parallelogr. NFBA. Propter hijperbolen verò est contentum LC, CE aequale contento EK, KG hoc est contento EF, FB, quare erit ut LC ad FB hoc est ut CD ad DF ita FE ad EC. linea igitur FC in eandem proportionem divisa est puncto D et puncto E, ideoque erit CD ipsi FE aequalis hoc est ipsi AB sunt autem CD et AB latera similiter posita similium triangulorum CDL, ABR; ergo et DL ipsi BR aequalis erit, et tota BL aequalis DR. sed BL aequalis est lineae datae. Itaque factum est quod proponebatur. Eâdem ratione potest ostendi QS ipsi BO seu BL aequalis.

Determinatio autem problematis solida est, nam solâ quidem regulâ et circino inveniri nequit omnium brevissima per punctum B ducta intra angulum N. Qui si rectus est, adeo ut parallelogr. NB sit rectangulum, tum eodem modo brevissima per punctum B ducetur, quo duae mediae proportionales inveniuntur inter lineas FN, NA. [9]) Sicut Hero vel Nicomedes. [10]) Sed Heronis quidem inventum etiam ad angulos non rectos hic extendi potest. Etenim dato intra angulum BAC [Fig. 3] puncto D, si oporteat brevissimam ducere omnium quae per idem punctum intra eundem angulum duci possunt; jungatur DA. et in duo aequalia dividatur puncto E. Tum applicetur regula puncto D, eaque moveatur donec reperiantur EB, EC aequales, quod circino sepius

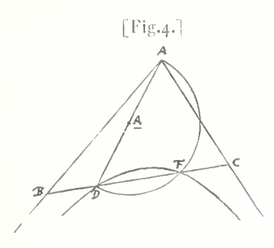
[Fig. 3.]



[9]) Voir la pièce N°. XIV aux pages 62—63, où Huygens démontre que la droite EF de la figure de la page 62 citée sera minimale, quand on a $AF^3 = BA \times BC^2$.

[10]) Consultez pour la construction de Nicomède, la „Compositio Nicomedis," p. 15 de la pièce N°. II. En effet, la droite KE de la figure 2 de cette p. 15, n'est autre, pour le point

tentando facile assequemur, et jungatur BC, Eritque haec omnium brevissima: [11]) atque hac quidem ratione determinari problema potest.



[Fig.4.]

Aliter quoque ijsdem positis omnium brevissima ducetur, hoc modo.

Per D punctum, circa asymptotos AB, AC describatur hijperbole DF. et super AD semicirculus, qui ubi hijperbolen secabit in F, inde ducatur FD et producatur utrimque, atque haec propositum efficiet, eritque BDC omnium brevissima, quae per D duci possunt. [12])

Aliter quoque, non descriptâ hijperbolâ, sed semicirculo tantum, moveatur regula secundum punctum D, donec inveniantur BD, FC inter se aequales.

Problema hoc de minima inferius resolutum vide, et calculo demonstratum. [13])

H, que la droite cherchée de longueur minimale. Dans la construction de Héron, où il s'agit de même de trouver les deux moyennes proportionnelles entre les côtés GL et LA (voir toujours la figure de la p. 15) d'un rectangle donné, la droite LH est divisée en deux parties égales par le point I et la droite EK est supposée construite de manière qu'on ait IK = IE; alors, comme dans la construction de Nicomède, on aura GL : AE = AE : GK = GK : LA, et la droite KE sera donc identique à la droite cherchée. (On trouve cette construction de Héron p. 6 recto et verso de l'édition de Commandin des „Collectiones mathematicae" de Pappus; Hultsch, T. I, p. 62—65).

[11]) Voir, pour la démonstration, la troisième partie de la pièce N°. XIV, p. 67.

[12]) Pour déduire cette nouvelle construction de celle de la figure 3, abaissons dans cette dernière figure sur BC les perpendiculaires EE_1 et AA_1. Alors on aura $BE_1 = E_1C$, $DE_1 = E_1A_1$ et par suite $BD = A_1C$; donc le point A_1, correspondant au point F de la figure 4, se trouvera à la fois sur le cercle décrit sur AD comme diamètre et sur l'hyperbole passant par D et ayant BA et AC pour asymptotes.

D'ailleurs les méthodes modernes conduisent aisément à ce même résultat. En tournant le segment BC autour du point D (Fig. 4) d'un angle infinitésimal ε et en égalant à zéro l'accroissement $(DC \cot C - BD \cot B)\varepsilon$, on trouve; $BD : DC = \operatorname{tg} B : \operatorname{tg} C = \frac{AC}{\cos B} : \frac{AB}{\cos C} = AC \cos C : AB \cos B = CF : FB$, où F est le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur BC; ainsi le segment BC doit être divisé par les points D et F dans un même rapport, d'où il suit: BD = FC.

[13]) Voir la seconde et la troisième partie de la pièce N°. XIV, p. 65—68. La phrase a été ajoutée plus tard.

IX. [1])

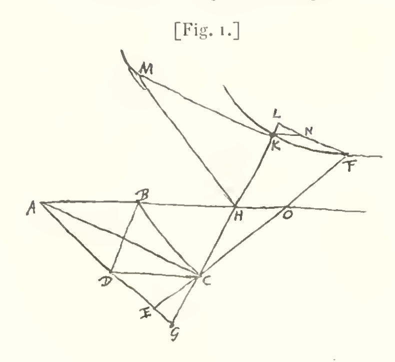
1652.

17 Febr. 1652.

Rhombo dato ABCD productisque ejus lateribus, oporteat ducere ECO aequalem datae lineae.

Factum sit et sit ipsi EO aequalis CF. Itaque erit punctum F ad hijperbolen, quae invenietur ut supra, [2]) ductis nimirum diametris AC, BD, et GCHK parallelâ DB et HK ipsi BD aequali, et HM parallela BC; erit quaesita hijperbole quae per K describitur circa asymptotos HM, HO. et quoniam HK nunc bifariam dividit angulum MHO, erit KL axis hijperboles, CK latus transversum. Sit KM ipsi CK ad angulos rectos, eritque KM aequalis AC. Vocetur AC seu KM a. DB seu HK, b. EO, seu CF, c. ductâque FL ipsi HK ad angulos rectos, sit KL ∞ x.

[Fig. 1.]



KM potest quartam figurae partem

[1]) La pièce se trouve aux pages 200—201 du manuscrit N°. 12. Elle contient une autre solution, préparée par la pièce précédente N°. VIII, du problème de la pièce N°. VII.

[2]) Voir le second et le troisième alinéa de la pièce précédente.

quae continetur lateri tranſverſo CK et latere recto. [3]) itaque HK ad KM ut KM ad $\frac{1}{2}$ lat. rectum. Quare ut HK ad $\frac{1}{2}$ l. rectum, ſeu ut CK ad lat. rectum ita HK qu. ad KM qu. hoc eſt ita *bb* ad *aa*.

Ergo dicemus porro per 21. lib. Con. [4]) CK ad latus rectum ut ▭ CLK ad □ LF

$$bb \text{ ad } aa \text{ ut } 2bx + xx \text{ ad } \frac{2baax + aaxx}{bb} \ \square\ \text{LF}$$

$$\text{ſ[ubtr.]} \begin{cases} \square\ \text{CF}\ cc \\ \square\ \text{CL}\ 4bb + 4bx + xx \end{cases}$$

$$\text{fit } \square\ \text{LF}\ cc - 4bb - 4bx - xx \propto \frac{2baax + aaxx}{bb}$$

$$xx \propto \frac{-2a^2bx - 4b^3x + bbcc - 4b^4}{aa + bb}$$

fiat ut CH (b) ad HA $(\sqrt{aa + bb})$ ita LK (x) ad KN [5]) $\left(x \sqrt{\frac{aa+bb}{b}}\right) \propto$

$\propto y$ ergo $x \propto \dfrac{by}{\sqrt{aa + bb}}$ hoc vero ponendo pro x fit

$$yy \propto \frac{-2aa - 4bb}{\sqrt{aa + bb}}\, y + cc - 4bb$$

Unde conſtructio quae ſequitur.

---

[3]) Voir la note 51 de la page 114 du Tome XI. La „figura," dont il est question, est le rectangle construit sur le diamètre CK et le „latus rectum."

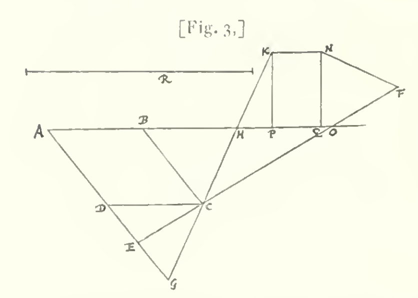
[4]) Voir la note 12 de la page 300 du Tome XI.

[5]) Cette droite KN est supposée parallèle à AB.

COMPOSITIO.

Ponatur ipſi BA aequalis BH et ducatur GCH, et producatur ut ſit HK aequalis HC. ex K ducatur KP ipſi AH ad angulos rectos. et ponatur AQ quae poſſit quadr. AP unà cum differentia quadratorum ex R et GH, debet autem R non minor data eſſe quam HG. Porro perfecto rectangulo PN, ducatur NF[6]) ipſi GK ad angulos rectos, et ex C ponatur CF ipſi R datae aequalis, et producatur uſque in E. dico partem ejus interceptam OE datae R aequalem eſſe.

[Fig. 3.]



Optimam conſtructionem hujus vide inferius. [7])

[6]) Posant $\frac{a^2+2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{a^2+b^2} + \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \mathrm{AH} + \mathrm{HP} = \mathrm{AP} = p$, l'équation quadratique du texte peut s'écrire : $y^2 + 2py = c^2 - 4b^2$. On a donc $y = -p + \sqrt{p^2 + c^2 - 4b}$; où c est égale à la longueur donnée R ; donc $\sqrt{p^2 + c^2 - 4b^2} = \mathrm{AQ}$ par construction et $y = \mathrm{AQ} - \mathrm{AP} = \mathrm{PQ} = \mathrm{KN}$; mais cet y représente le segment KN de la Fig. 1 et puisque, par construction, les points K des deux figures sont identiques, il en est de même des points N, des droites NF et des points F. Inutile de dire que la racine $y = -p - \sqrt{p^2 + c^2 - 4b^2}$ amène les droites, passant par C, desquelles des segments de la longueur donnée sont découpés par les côtés des angles extérieurs du losange, au sommet A ; mais il semble bien que Huygens ne s'est jamais aperçu que les quatre droites, menées par le sommet d'un losange, de telle manière que les côtés des angles extérieurs et de l'angle intérieur, qui appartiennent au sommet opposé, en découpent des segments de même longueur, ne sont que les quatre solutions d'un seul et même problème.

[7]) Voir la seconde partie de la pièce N°. XIII, p. 58. La phrase a été ajoutée plus tard.

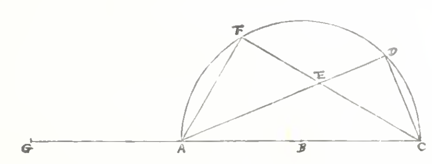
X.[1])

1652.

Kal. Mart 1652.

Cubum invenire dati cubi duplum.

Sit datus cubus cujus latus AB. Radio AB femicirculus defcribatur AFDC, et pofitâ AF aequali ipfi AB jungatur FC. deinde fecundum A punctum regula moveatur inter F et C donec inveniatur FE abfciffa aequalis fubtenfae DC. quod quidem ponatur factum effe, et regulam habere pofitionem AED, ut fit FE ipfi DC aequalis. Dico cubum ex AE duplum effe cubi ex AB.



Producatur enim CA et fit AG ipfi AE aequalis. Propter triangulos fimiles igitur eft EC ad CD hoc eft EF, ut EA ad AF. Et componendo CF ad FE ut utraque fimul EA, AF, hoc eft, GB ad AF, et permutando CF ad GB ut FE ad AF. Quare ut CF quadratum ad quadr. GB ita quadr. EF ad qu. FA. Et componendo ut quadrata ex CF et ex GB ad qu. ex GB, ita quadrata EF et FA, hoc eft, quadratum EA ad qu. AF. Quadrata autem ex CF et GB fimul aequalia funt rectangulo GCA et qu.° ex AG: Quadratum enim GB aequale eft rectangulo

[1]) La pièce a été empruntée aux pages 203—206 du manuscrit N°. 12. Elle contient une solution exacte du problème de la duplication du cube; supposant qu'il soit possible de construire la figure du texte, où AF = AB, de telle manière qu'on ait EF = DC. En outre elle donne une solution approximative du même problème. Ces solutions ont été reproduites, sous une autre rédaction, dans les „Illustrium quorundam problematum constructiones" de 1654, comme „Problema II".

CGA et quadr.° AB seu AF (10.2.).[2] quare addito utrinque qu° FC, erunt quadrata GB, FC simul aequalia rectangulo CGA una cum quadratis AF,FC, hoc est unà cum quadrato AC. Estque rectangulum CGA cum qu.° AC aequale rectang.° GCA cum qu.° GA. Itaque et quadrata GB, FC simul aequalia rectangulo GCA cum qu.° GA, sicut diximus.

Ut igitur rectang. GCA cum qua. AG ad qu. GB ita est qu. EA ad qu. AF, hoc est, ita qua. GA ad qu. AB. Et permutando, ut rectang. GCA cum qu.° AG ad qu. AG ita qu. GB ad qu. AB. Et dividendo, ut rectang. GCA ad qu. AG ita qu. GB dempto qu.° AB hoc est rectang. CGA ad qu. AB. Et permutando rursus ut ▭ GCA ad ▭ CGA, hoc est ut AÇ ad AG ita qu. AG ad qu. AB. Quare cubus ex AG seu AE duplus erit cubi AB. Quod erat dem.[3]

Lineam verò AD ita ducere ut sit DC subtensa aequalis abscissae EF, atque adeo cubum duplicare vel cuicunque solido dato aliud simile duplum constituere, eâ poterimus ratione quam deinceps trademus;[4] quâ quidem problema quod naturâ solidum est per plana solutum videri posset, ni demonstratio contrarium evinceret.

Etenim positâ sicut ante AF aequali AB, Hoc est posito arcu AF triente peripheriae AFDC : Si porro arcus CD statuatur ejusdem peripheriae quadrans, junganturque FC, DA dico cubum ex AE majorem quidem fore cubo duplo ex AB. at si pars bismillesima ex AE recidatur, residui cubum minorem fore duplo cubi AB.

Manifestum enim est AE secantem esse anguli partium $37\frac{1}{2}$ qualium peripheria

[2]) Lisez (6.2. Elem.), comme on le trouve dans les „Ill. quor. probl. constr.", au lieu cité dans la note précédente. C'est la ressemblance du début des deux propositions 10.2 et 6.2 qui a causé l'erreur. Voici d'ailleurs cette dernière proposition : „Si recta linea bifariam secetur, & illi recta quaedam linea in rectum adiiciatur : Rectangulum comprehensum sub tota cum adiecta, & adiecta, vna cum quadrato ex dimidia, aequale est quadrato à linea quae tum ex dimidia, tum ex adiecta componitur, tanquam ab vna, descripto." (Clavius, p. 178.)

[3]) A cause de la forme que Huygens a cru devoir donner à cette démonstration, elle semble plus compliquée qu'elle ne l'est réellement. De la similitude des triangles DEC et FEA Huygens déduit la proportion : $(EC + CD)^2 : (EA + AF)^2 = CD^2 : AF^2$; mais puisqu'on a par construction $DC = EF$ et $AF = AB$, on trouve, en posant $AB = r$, $AE = b$, $(EC + CD)^2 = CF^2 = AC^2 - AF^2 = 3r^2$; $CD^2 = EF^2 = b^2 - r^2$. La proportion peut dont s'écrire :

$$3r^2 : (b + r)^2 = (b^2 - r^2) : r^2$$

d'où l'on déduit successivement en appliquant, à l'exemple de Huygens, les propriétés bien connues des proportions :

$$4r^2 + 2br + b^2 : (b + r)^2 = b^2 : r^2$$
$$4r^2 + 2br : b^2 + 2br = b^2 : r^2$$
$$2r \quad : \quad b \quad = b^2 : r^2.$$
$$b^3 = 2r^3.$$

[4]) Voir la construction approximative, qui va suivre.

AFDC 180 continet. nam AF arcus eſt partium 60, et CD partium 45; itaque FD, 75. at angulus FAD ſubduplus eſt ejus qui ad centrum, itaque FAD angulus eſt partium $37\frac{1}{2}$. ubi dicebamus. [5]) AF autem aequalis eſt ipſi AB radio; qui ſtatuatur partium 100000. ad demonſtrationem vero hiſce duobus theorematibus opus habebimus quorum poſterius eſt Pellij. [6])

THEOR. 1. *Si cujuslibet arcus, qui minor ſit 45 partibus, tangentis quadratum auferatur à quadrato radij; reſiduum dividatur per tangentis ejusdem duplum, orietur tangens complimenti arcus illius dupli.* [7]) Vel sic. *Duplum tangentis eſt ad ſummam tangentis et radij, ſicut eorundem differentia ad tangentem complementi arcus prioris dupli.*

THEOR. 2. *Si tangens cujuſlibet arcus minoris 45 partium, ducatur in duplum quadratum radij. Productum dividatur per differentiam quadratorum radij et tangentis, orietur tangens arcus dupli* [8])

Eſto itaque arcus alicujus ignoti tangens 26800; invenietur per theor. ſecundum arcus dupli tangens 57747 &c. Sed haec major eſt tangente 30 gr. nam tangens 30 gr. eſt ad radium potentia ut 1 ad 3, et longitudine ut 57735 ad 100000. Itaque arcus duplus ignoti arcus major eſt quam 30 gr. ac proinde arcus cujus tangens 26800, major quam 15 gr.

Eſto denuò alterius alicujus arcus tangens 76700, Erit per Theor. noſtrum, tangens complimenti arcus iſtius dupli 26839. Haec autem tangens major eſt quam 26800. Ergo dictum complimentum apparet majus eſſe quam 15 gr. Atque ideo arcus iſte cujus dupli complementum erat, id eſt, arcus cujus tangens ponebatur 76700, minor erat quam $37\frac{1}{2}$ gr. nam bis $37\frac{1}{2}$ hoc eſt 75 gr. una cum gr. 15 quadrantem circuli explent. Itaque 76700 minor eſt tangente $37\frac{1}{2}$ gr. hoc eſt minor linea FE, nam haec tangens eſt $37\frac{1}{2}$ gr. Quadratum igitur ex AF quae eſt 100000 una cum qu.° ex 76700 ſimul minora ſunt qu.° ex AE. Illis autem duobus ſimul quadratis adhuc minus eſt quadr. ex 126000; itaque

[5]) Huygens a biffé toute la partie de la pièce qui suit; ce qu'il fit probablement lorsqu'il prépara en 1654 la publication des „Illustrium quorundam problematum constructiones". Ajoutant alors en marge le mot „Puerilia", il remplaça toute cette partie par la seule phrase: Ergo AE ex tab. sin. 126047. Unde propositum facile comprobatur." Comparez les „Ill. quor. probl. constr." au „Problema II."

Toutefois, nonobstant l'annotation de Huygens, nous n'avons pas supprimé cette partie du texte parce qu'il nous semblait curieux de montrer jusqu'à quel point Huygens, à cette époque, croyait devoir se conformer à la manière de démontrer des anciens, même dans une matière qui s'y prêtait fort peu; déguisant ainsi entièrement la marche qu'il avait suivie pour arriver à ses résultats.

[6]) Voir, sur Pell, la note 2, p. 14 du T. I. Il s'agit ici du théorème principal de l'ouvrage cité dans la note 5, p. 176 du T. I. On le rencontre la première fois à la page 13 de cet ouvrage.

[7]) En notation moderne; $\cot 2\alpha = (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) : 2\operatorname{tg} \alpha$.

[8]) $2 \operatorname{tg} \alpha : (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) = \operatorname{tg} 2\alpha$.

126000 omnino minus erit quam AE. atqui cubus ex 126000 qui eſt 2000376000000 major eſt duplo cubo ex AF ſeu ex 100000. Igitur multo magis cubus ex AE major erit duplo cubo ex AF ſeu ex AB. quod erat primum.

Nunc autem oſtendemus, lineam AE diminutam parte ſui biſmilleſima, producere cubum minorem duplo cubo ex AB.

Sit tangens alicujus arcus 26790. Invenietur per Theorema 2^{dum} tangens arcus dupli 57722 &c. Haec autem minor eſt tangente gr. 30, quam ſuprà diximus eſſe 57735. Ergo arcus cujus tangens ponebatur 26790 minor eſt quam 15 gr.

Rurſus alterius alicujus arcus ſit tangens 76737; Ergo per theorema 1^{mum} erit tangens complimenti arcus iſtius dupli 26789 &c. Haec verò tangens minor eſt quam 26790. Ergo cum 26790 oſtenſa fuerit minor tangente gr. 15, erit omninò 26789 minor quoque tangente gr. 15. Itaque cujus arcus tangens erat 76737, ejus arcus dupli complimentum minus eſt quam 15 gr. Ideoque dictus arcus duplus major eſt quam 75 gr. et ipſe arcus cujus tangens 76737, major quam $37\frac{1}{2}$ gr. Eſt autem FE tangens $37\frac{1}{2}$ gr. Ergo FE minor quam 76737. Quadratum igitur ex AF et ex 76737, ſimul majora erunt quadrato ex AE.

Dictis autem quadratis duobus majus eſt quadratum quod fit ex 126050; Itaque 126050 omnino majus erit quam AE. Cubus autem ex 125990 minor eſt duplo cubo AB. Major igitur eſt ratio 126050 ad 125990 quam ipſius AE ad latus cubi qui duplus ſit cubi ex AB. Sed ratione 126050 ad 125990 ſeu 12605 ad 12599 adhuc major eſt ratio 2000 ad 1999. Itaque ratio AE ad dicti cubi dupli latus multo minor eſt ratione 2000 ad 1999. Si igitur AE diviſa ſit in partes aequas biſmille; unâ earum demptâ, reliqui cubus minor erit duplo cubo ex. AB. quod erat oſtendendum.

2 mart. 1652.

Subtenſa arcus aequalis arcubus AF et DC, eſt latus cubi ſubdupli ejus qui ex AC. [9])

[9]) La remarque a été ajoutée plus tard. Il s'agit naturellement de la solution exacte. Appliquant la formule bien connue :

$$2 \text{ corde } (AF + DC) = \text{corde } AF . \sqrt{4 - (\text{corde } DC)^2} + \text{corde } DC . \sqrt{4 - (\text{corde } AF)^2}$$

qu'on déduit du théorème de Ptolemée, on trouve, d'après les calculs de la note 3, qu'elle exige :

$$2\sqrt[3]{4} = \sqrt{5 - \sqrt[3]{4}} + \sqrt{3(\sqrt[3]{4} - 1)};$$

c'est-à-dire :

$$\left\{2\sqrt[3]{4} - \sqrt{5 - \sqrt[3]{4}}\right\}^2 = 3(\sqrt[3]{4} - 1);$$

ou bien :

$$\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} - 1 = \sqrt{5 - \sqrt[3]{4}};$$

ce qu'on vérifie aisément en élevant au carré.

La remarque est donc juste.

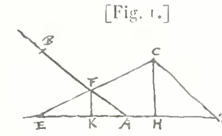
XI.[1]

1652.

9 Mart. 1652.

Datis positione duabus lineis angulum comprehendentibus AB, AE, et puncto extra angulum C: ducere CFE ita ut comprehensa FE sit aequalis abscissae FB ad datum punctum B in linea AB.

[Fig. 1.]



Ducatur CD parallela BA et occurrat productæ EA in D. Dantur igitur AD et DC. Sed et perpendicularis CH data erit quoniam datus angulus EAB vel ADC. Ducatur FK ipsi EA similiter perpendicularis.

Sit AB ∞ a; AD ∞ b; DC ∞ c; DH ∞ d; AE ∞ x.

ED $(x+b)$ ad DC (c) ut EA (x) ad AF $\left(\frac{cx}{x+b}\right)$; ergo $a - \frac{cx}{x+b} \infty$ EF vel BF. q.EF $aa - \frac{2acx}{x+b} + \frac{ccxx}{xx+2bx+bb}$.

ED $(b+x)$ ad DH (d) ut EA (x) ad AK $\left(\frac{dx}{b+x}\right)$

$$\left.\begin{array}{r} xx \text{ q.EA} \\ \frac{ccxx}{xx+2bx+bb} \text{ q.AF} \end{array}\right\} \text{ad [de]}$$

---

[1]) La pièce est empruntée aux pages 207—209 du manuscrit N°. 12. Elle contient deux solutions du problème des deux moyennes proportionnelles avec l'analyse qui a conduit a ces solutions, lesquelles ont été reproduites avec des changements de rédaction plus ou moins importantes dans les „Illustrium quorundam problematum constructiones" de 1654 au „Probl III. Datis duabus rectis duas medias proportionales invenire."

$$\left.\begin{array}{l} xx + \dfrac{ccxx}{xx+2bx+bb} \;\square\; \text{EA} + \text{q.AF} \\[2ex] aa - \dfrac{2acx}{x+b} + \dfrac{ccxx}{xx+2bx+bb}\; \text{q.EF} \end{array}\right| \text{Subtr.}$$

$$\text{AK. 13.2}^{\text{di}}\,{}^{2)}\quad \frac{xx - aa + \dfrac{2acx}{x+b}}{2x} \infty \frac{dx}{b+x}\,\text{AK}$$

$$x^3 + bxx - aax + 2acx - baa \infty 2dxx$$

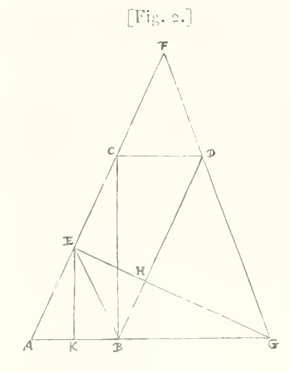
$$x^3 + \left.\begin{array}{l} b \\ -2d \end{array}\right| xx + \left.\begin{array}{l} 2ac \\ -aa \end{array}\right| x - baa \infty 0$$

Si ponatur $b \infty 2d$ et $a \infty 2c$ erit $x^3 \infty baa$ hoc eſt, erit AB et AD inter, una duarum mediarum proportionalium AE.

Hinc inventae ſunt conſtructiones duae ſequentes.

10 mart.

[Fig. 2.]



Duas medias proportionales invenire inter datas lineas.

Sint datae duae AB et AC, quae ſic diſponantur ut angulus CBA ſit rectus. Compleatur parallelogrammum ABDC, et producatur AB. Et diviſâ AC per medium in E, ducatur EHG ita ut abſciſſae HD ſit aequalis HG.

Hoc autem vel ſepius tentando aſſequi poſſumus, vel ope Hyperboles ſicut infra docebimus [3]) Sed factum jam ponatur, et ducatur GDF occurrens productae AC in F. Dico duarum CA, AB medias eſſe proportionales BG et FC. [4]) Jungatur enim EB et ſit EK [5]) ipſi AB ad angulos rectos. Quia igitur BE aequalis EA, erit quoque BK aequalis

[2]) Voir la note 18, p. 30 du Tome présent.

[3]) Voici cette construction telle qu'on la déduit de celle qu'on trouve dans le second alinéa qui suit dans la présente pièce l'en tête „Aliter". Imaginons sur le segment FG un point N, tel qu'on ait GN = FD, alors ce point se trouve en premier lieu sur l'hyperbole qui passe par le point D et qui a AB et AC pour asymptotes, et en second lieu (puisqu'on a EG = EF aussi bien que HG = HD) sur le cercle qui passe par D et qui a E pour centre. On peut donc construire le point N, mener par N et D la droite FG, et tirer enfin EG.

[4]) On remarquera que cette seconde des deux moyennes proportionnelles ne s'est pas présentée dans l'analyse.

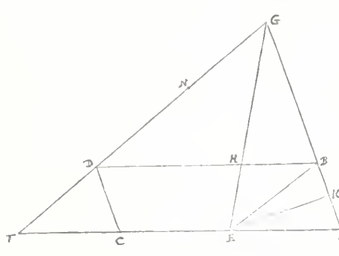
[5]) La partie du texte que nous venons de reproduire sous la date du 10 mars constitue la rédaction primitive de la solution du problème, où on reconnaît encore aisément les résultats de l'analyse algébrique qui précède. Seulement la notation est changée; l'angle donné BAE de la

KA. Quum itaque AB in aequalia dividatur ad K, et adjecta fit ipfi linea BG, erit rectang. AGB cum quadrato ex KB aequale qu° ex KG; [6]) et addendo utrinque quadr. KE, erit rectang. AGB una cum quadratis BK, KE, hoc eft una cum quadrato BE, aequale quadratis GK et KE, hoc eft quadrato EG. Similiter quia AC in aequalia dividitur in E et adjecta eft linea CF, erit rectang. AFC cum qu.° EC aequale qu.° EF. Quadratum autem EF aequale eft qu.° EG; (quia et DH ipfi HG aequalis, et fimilia funt triangula DHG et FEG) [7]) Erit ergo rectangulum AFC cum qu.° CE aequale rectangulo AGB cum quadrato BE. Atqui quadr. BE aequale eft EC quadrato; et reliquum igitur rectangulum AFC rectangulo AGB aequale erit. Quare ficut FA ad AG ita BG ad CF. ut autem FA ad AG ita eft DB ad BG, et ita quoque FC ad CD. Igitur ut DB hoc eft AC ad BG ita BG ad FC et FC ad CD hoc eft AB. Itaque inter AC ut AB duae inventae funt mediae BG, FC. quod erat faciendum.

Fig. 1 se retrouve, tourné à droite, dans la Fig. 2 sous la notation DBG et la construction débute par le triangle rectangle qu'on obtiendrait dans la Fig. 1 en érigeant en A une perpendiculaire qu'on prolongerait jusqu'à ce qu'elle coupe le prolongement de CD et dont l'hypoténuse égalerait AB, puisque $AB = a = 2c = 2\,CD$ et $AD = b = 2d = 2HD$.

Or, le même jour, Huygens a remanié cette partie du texte. Partant de la remarque que l'égalité de HG et HD entraîne celle de EG et EF, il a modifié la construction de manière a produire la même figure par d'autres moyens et dans une autre disposition. C'est cette seconde rédaction, dans laquelle on ne peut presque plus retrouver les résultats de l'analyse, qui a passé avec des modifications légères dans les „Ill. quor. probl. constr." Elle est comme il suit:

„10 mart. 1652. *Duas medias proportionales invenire inter duas lineas.*

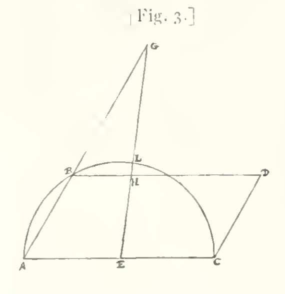


Sit major datarum AC, per medium divifa in E, minor autem fit AB, quae fic conftituatur ut triangulum EAB habeat crura aequalia AE, EB. Et compleatur parallelogrammum CABD. Et producantur AC, AB. Tum applicetur regula ad punctum D, et moveatur, quoufque pofitionem habeat GF, abfcindens nimirum EF aequalem EG lineae quae ex E ad alteram interfectionem ducitur. Hoc autem vel fepius tentando affequemur, vel ope Hyperboles ut poftea oftendetur. [Voir la seconde solution qui va suivre dans le texte sous l'en-tête „Aliter."]

Dico inter AC, AB medias duas inventas effe BG, CF. Sit enim EK ipsi AB ad angulos rectos." etc. [voir ce qui suit dans le texte].

[6]) C'est-à-dire $AG \times GB + KB^2 = KG^2$.

[7]) Les mots entre parenthèses ont été biffés puisqu'ils devenaient superflus dans la nouvelle rédaction que nous avons reproduite dans la note 5 et d'après laquelle on avait par construction $EF = EG$.



[Fig. 3.]

Aliter. [8])

Super majori datarum AC [Fig. 3.] ſemicirculus[9]) deſcribatur, et ponatur AB minori datarum aequalis, et compleatur parallelogrammum AD; productâque AB, ducatur ex centro E recta EHG, eâ ratione ut ipſi HG ſit aequalis HD; ſecet autem circumferentiam in L. Dico duabus AC, AB medias proportionales inventas eſſe BG, GL. Cujus quidem demonſtratio ex praecedenti manifeſta eſt. Namque in priori figura [10]) ſi aequales EF, EG, erunt propter triangula ſimilia etiam HD, HG aequales; et contra. Ex quo manifeſtum eſt utroque modo lineam BG eandem reperiri. Porro FC differentiam fuiſſe conſtat linearum EF, EC, hoc eſt duarum EG, EC: atque ea hìc eſt LG. Subjicitur autem et alia demonſtratio. [11])

Quod autem dictum eſt in priori conſtructione, lineam FDG [12]) ope hyperboles duci poſſe, ut EF, EG ſint aequales, hinc conſtabit. Si namque ſumatur GN ipſi FD aequalis, manifeſtum eſt punctum N fore ad hyperbolen quae diſcribitur per D punctum, circa aſymptotos AF, AG. Verum idem punctum N eſt quoque ad circuli circumferentiam quae deſcribitur centro E, radio ED. Itaque datum eſt poſitione punctum N. Et D datum eſt: Ergo et linea FG quae per utrumque ducitur poſitione datur. Et Compoſitio manifeſta eſt.

Perficiatur circulus ALCK [Fig. 4], et producatur GE uſque ad circumf.^m in K.

---

[8]) La construction qui va suivre, en outre qu'elle parut dans les „Ill. quor. probl. constr." (voir la note 1), fut communiquée à G. A. Kinner à Löwenthurn dans une lettre du 29 déc. 1652 (p. 212 du T. I) sans démonstration; celle-ci suivit dans la lettre du 9 août 1653 (p. 238 du T. I).

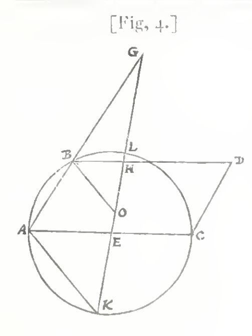
[9]) Pour comprendre comment Huygens a obtenu cette nouvelle construction on doit comparer cette figure avec celle de la note 5. On verra alors qu'il ne s'agit que d'un nouveau remaniement de la construction de cette note.

[10]) La figure de la note 5.

[11]) Cette phrase et la nouvelle démonstration mentionnée qui commence avec le mot: „Perficiatur," furent ajoutées le 5 juin 1652 (voir la date, à la page qui suit, au bas du texte). Ce fut cette démonstration qui passa dans les „Ill. quor. probl. construct.," et qui fut communiquée à Kinner à Löwenthurn.

[12]) Voir toujours la figure de la note 5.

[Fig. 4.]



Et jungatur AK, eique parallela ducatur BO. Itaque fimiles funt trianguli AEK, BHO; et quia AE aequalis EK, etiam BH, HO aequales erunt. Sed et HG, HD inter fe aequales funt; igitur tota OG aequalis BD, hoc eft diametri AC vel LK. Et ablatâ communi LO, relinquuntur aequales inter fe GL, OK. Eft autem rectangulum KGL aequale rectang.° AGB, ideoque ut KG ad GA ita eft BG ad GL. Sed ut KG ad GA ita propter triang.os fimiles eft quoque OG ad GB, et ita reliqua OK hoc eft LG ad BA. Ergo ut OG hoc eft AC adGB ita BG ad GL et LG ad AB. Quod erat demonftrandum.

5 Jun. 1652. [13])

[13]) La date se rapporte au dernier alinéa. Comparez la note 11.

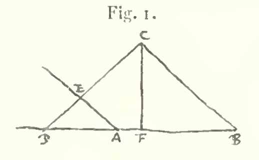
XII. [1]

1652.

16 Mart. 1652.

Datis positione lineis AD, AE angulum comprehendentibus, et puncto extra angulum, C. Ducere CED rectam, et facere AD ipsi CE aequalem.

Fig. 1.



Factum jam sit, et ducatur CB parallela EA. et sit CF ipsi DB ad angulos rectos.

Vocetur AB b; BC c; BF d; DA x.

BA (b) ad BD $(b+x)$ ut CE ∞ AD (x) ad CD $\left(x + \frac{xx}{b}\right)$

$$\left.\begin{array}{r} bb + 2bx + xx \text{ q. DB} \\ cc \text{ q. BC} \end{array}\right\} \text{a[dde]}$$

$$\left.\begin{array}{r} bb + 2bx + xx + cc \\ xx + \frac{2x^3}{b} + \frac{x^4}{bb} \text{ q.CD} \end{array}\right\} \text{s[ubtr].} \qquad \left.\begin{array}{r} b + x \text{ DB} \\ 2d \text{ 2FB} \end{array}\right\} \text{m.}$$

$$bb + 2bx + cc - \frac{2x^3}{b} - \frac{x^4}{bb} \infty 2db + 2dx \quad 2\square \text{ DBF}$$

$$x^4 + 2bx^3 + \left.\begin{array}{r} 2dbb \\ -2b^3 \end{array}\right\} x \left.\begin{array}{r} +2db \\ -cc \\ -bb \end{array}\right\} bb \infty 0.$$

[1]) La pièce occupe les pages 210 et 211 du manuscrit N°. 12. Elle contient une troisième solution du problème des deux moyennes proportionnelles avec l'analyse qui l'a amenée. Cette solution a été reproduite, avec de légères modifications, dans les „Ill. quor. prob. constr." de 1654, comme la troisième et dernière solution du „Probl. III. Datis duabus rectis duas medias invenire."

Si $dbb - \frac{1}{2}ccb - \frac{1}{2}b^3$ quod id eſt quod in quantitate cognita ductum eſt in $2b$, aequale eſſet $- 2b^3 + 2dbb$, quod in x ductum eſt; tota aequatio dividi poſſet per $x + 2b$ et fieret $x^3 + 2dbb - 2b^3 \infty 0$ et $x^3 \infty \left.\begin{matrix} +2b \\ -2d \end{matrix}\right| bb$

adaequantur igitur $dbb - \frac{1}{2}ccb - \frac{1}{2}b^3 \infty - 2b^3 + 2dbb$ fit $cc \infty 3bb - 2db$. Si ergo haec aequalia à principio ponantur, erit $x^3 \infty \left.\begin{matrix} +2b \\ -2d \end{matrix}\right| bb$ unde erit DA una mediarum duarum inter AB et duplam AF. Nam dupla AF eſt $2b - 2d$. Datis itaque duabus lineis poterimus duas medias proportionales invenire eo modo qui ſubjungitur.

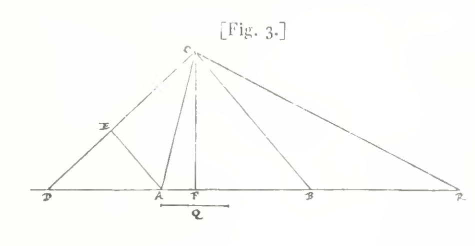
Duas medias proportionales invenire.

Sint datae AB et Q quibus duas medias invenire opus ſit. Dimidiae Q ponatur aequalis AF, et ſit BR aequalis AB. Et ex F erigatur perpendicularis FC, et ipſi RA aequalis ponatur RC, et jungatur BC, [2]) eique parallela ducatur AE. Et applicatâ regula ad punctum C, moveatur ea quouſque poſitionem habeat CD, faciens AD aequalem CE.

Dico inter AB et Q duas medias inventas eſſe CE, ED. [3])

Jungatur enim CA. Igitur quia aequales ſunt RA, RC et angulus CFA rectus, erit RA ad AC ut AC ad duplam AF, hoc eſt Q. ac proinde quadratum CA aequale contento RA, Q. quadratum autem CA cum qu.° AD et duplo ▭° DAF hoc eſt rectang.° DA, Q aequatur qu.° DC (12. 2. El.) [4]) Igitur qu. DC aequabitur qu.° DA una cum rectangulis DA, Q; AR, Q; hoc eſt una cum contento DR, Q. Quadratum vero DA aequale eſt qu.° EC; igitur ab aequalibus aequalia auferendo erit contentum DR, Q aequale differentiae qu.^{orum}

[Fig. 3.]



[2]) L'analyse qui précède, exige qu'on ait $c^2 = 3b^2 - 2db$; c'est-à-dire $BC^2 = 3AB^2 - 2BF. AB$. Or d'après la construction indiquée on a, en effet, $BC^2 = CR^2 - BR^2 - 2BF. BR = 4AB^2 - AB^2 - 2BF. AB = 3AB^2 - 2BF. AB$.

[3]) Ici, comme dans la pièce précédente (voir la note 4, p. 50), la seconde moyenne proportionnelle ne s'est pas présentée pendant le traitement analytique du problème; mais elle a été cherchée et découverte après coup.

[4]) Voir la note 15, p. 29 du Tome présent.

DC, CE. Quia autem DB et DC lineae similiter dividuntur in punctis A et E, est quadr. DB ad qu. AB ut qu. DC ad qu. CE; et dividendo et convertendo igitur qu. AB ad differentiam qu.orum DB, AB ut qu. EC ad differentiam qu.orum DC, CE; et permutando. Est autem differ.a qu.orum DB, BA aequalis rectangulo RDA, nam hoc duobus ▭is DAB et qu.o AD aequale est: Et dictum est differentiam qu.orum DC, CE aequari contento DR, Q. Itaque quadr. AB est ad EC qu. ut ▭ RDA ad contentum RD, Q, hoc est ut AD ad Q. Ut autem qu. AB ad qu. EC ita est AB ad ED longitudine: nam BA est ad AD, hoc est, CE, ut CE ad ED. Igitur ut AB ad ED ita est AD ad Q. Et permutando, ut AB ad AD ita ED ad Q. Atqui ut AB ad AD hoc est CE, ita diximus esse CE ad ED. Ergo ut AB ad CE ita CE ad ED et ED ad Q. Quod erat ostendendum.

19 Mart. 1652. [5])

---

[5]) La date se rapporte, d'après une légère différence dans l'écriture, à la démonstration géométrique à commencer par le mot „Jungatur."

XIII.[1]

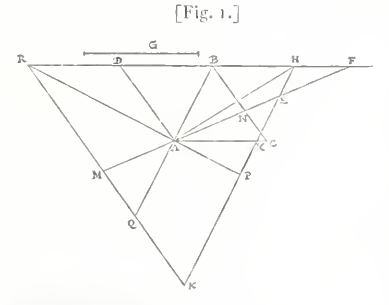
[1652].

[Première partie.][2]

16 Aug. 1652.

Rhombo dato, et uno latere producto, aptare sub angulo exteriori lineam magnitudine datam quae ad oppositum angulum pertineat.

[Fig. 1.]



Sit datus rhombus ADBC, cujus productum latus DB. Et data sit linea G. Oportet ducere rectam ANF, ut pars intercepta NF sit datae G aequalis.

Ducatur diameter AB, et quadratis ex G et AB sit aequale quadratum AH, et ducatur HE ipsi BA parallela. et AE ipsi G ponatur aequalis, eademque producatur ad F. Dico NF datae lineae G aequalem esse. Quod autem ad HE poni potest AE aequalis G hinc manifestum est. Etenim quadratum AH majus est

[1]) La pièce que nous avons divisée en deux parties, est empruntée aux pages 213—215 du manuscrit N°. 12. Elle a été reproduite sous une rédaction légèrement modifiée dans les „Illustrium quorundam problematum constructiones" de 1654 à la suite des „Probl. VI et VII" et sous l'en-tête „Utrumque praecedentium Aliter"; et de même dans une lettre à van Schooten du 10 déc. 1653 (p. 256—257 du T. I). L'analyse nous manque, mais il nous semble probable que la construction présente a résulté d'un remaniement de celle trouvée en 1650; voir la page 241 du Tome XI. En effet, la droite HE est identique avec la droite LM de la figure de la page citée. On le vérifie en prolongeant LM jusqu'à ce qu'elle coupe AD en un point S et en calculant $BS^2 = BD^2 + DS^2 + 2DS.BF$, où $DS = BL = KL - BK = \sqrt{BE^2 + BF^2} - BF$. Alors on trouvera $BS^2 = BD^2 + BE^2$; donc BS est égal à la droite AH de la figure présente.

[2]) Voir, pour d'autres solutions du même problème, la pièce N°. VIII des „Travaux" de 1650 (p. 239 du Tome XI), la pièce N°. VI de 1652 (p. 26 du Tome présent) et la note 10 de cette pièce N°. VI.

quadratis AX et XH quum ſit angulus AXH obtuſus. sed idem qu. AH. aequale ponitur qu.is AB ſeu HX et G. itaque qu. G ſeu AE majus eſt quadr.° AX. unde apparet interſectionem E accidere inter puncta H et X. Producatur BD et ponatur ipſi aequalis DR. et ſit RK parallela DA vel BC, eique occurrant productae FA, BA, HE, in punctis M, Q, K. Et jungatur RA, et producatur ad P.

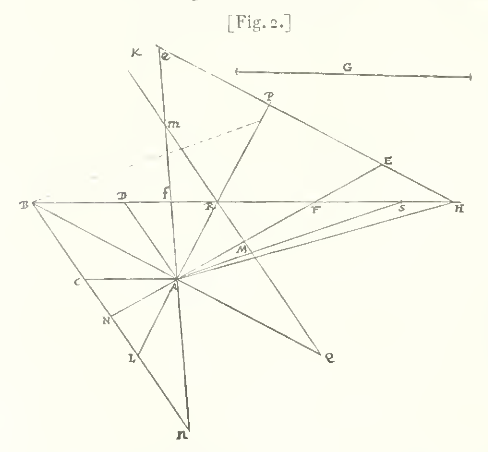
Quoniam igitur DR aequalis eſt DB et RQK parallela DA, erit et MA aequalis AN, et QA aequalis AB, angulus autem BAR rectus quum ſit in ſemic.lo quare et anguli ad P, nam BQ, HEK parallelae ſunt: et erit HP aequalis PK.

Eſt itaque qu. AH aequale qu.° AE una cum rectangulo HEK. ſed idem qu. AH aequale eſt qu.is ex AE et AB: itaque qu. AB aequale eſt ei quod ſub KE, EH. quare KE ad AB ut AB ad EH; verum ut KE ad AB ſeu QA ita eſt EM ad MA, et ut AB ad EH ita eſt AF ad FE, igitur EM ad MA ut AF ad FE, et EA ad AM ut EA ad EF. Itaque aequalis eſt EF ipſi AM, quare et ipſi AN. ideoque et FN ipſi AE hoc eſt datae G. quod erat demonſtrandum.

[Seconde partie.] [3)]

Rhombo dato et duobus contiguis lateribus productis, aptare ſub angulo interiori rectam magnitudine datam quae ad oppoſitum angulum pertineat.

[Fig. 2.]



Oportet autem datam lineam non minorem eſſe eâ quae ad dictum oppoſitum angulum pertinens diametro rhombi ad angulos rectos conſtituta eſt, et à productis lateribus intercipitur.

Eſto datus rhombus ADBC, et ductâ diametro AB ſecet eam ad angulos rectos linea RL occurrens utrinque productis lateribus BD, BC. Data autem ſit, ipſâ RL non minor, G recta, cui aequalem ponere oporteat FAN.

In schemate adjecto ſicuti propoſitum eſt, eadem conſtructio eſt et demonſtratio, quae in caſu praecedenti. [4)]

[3)] Voir, pour d'autres solutions du problème, la pièce N°. VII (p. 32) du 11 février 1652; la note 16 de cette pièce N°. VII, et la pièce N°. IX (p. 42) du 17 février 1652.

[4)] Voir la première partie de la pièce présente.

Illud autem hic aliter oſtendendum eſt, quod ad lineam HE poni poteſt AE ipſi G aequalis. ſit RS aequalis RB et jungatur AS. Quoniam igitur in triangulo BAS à vertice ad mediam baſin ducta eſt AR, erunt quadrata BR et RA, ſimul ſumpta, hoc eſt qu. BA cum duplo qu.° AR, ſubdupla quadratorum BA, AS. itaque qu. AB bis ſumptum cum quadruplo qu.i AR, hoc eſt cum qu.° RL, aequatur qu.is BA, AS. quare ablato utrimque qu.° BA, erit qu. AS aequ. quadratis BA et RL, ac proinde minus quam quadr. AH. Eſt igitur AS minor quam AH; ſed major est quam AR: itaque punctum S cadit inter R et H. ergo RH major quam RS vel RB. et quum propter triangulos ſimiles, ſit RH ad HP ut RB ad BA, erit quoque HP major quam BA, et quadr. HP majus quadr.° AB. at qu. HP cum qu.° PA aequatur qu.is BA et G; ergo quum qu. HP ſit majus quam qu. AB, erit invicem PA qu. minus quam qu. G. patet itaque quod ſi centro A circumferentia deſcribatur ſemidiametro AE aequali G, ea lineam HE in duobus punctis ſecabit. [5])

---

[5]) C'est-à-dire aux points E et *e* de la figure; lesquels amènent les solutions FN et *fn*.

XIV.[1]

1652.

15 Sept. 1652.

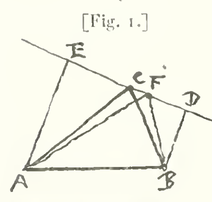
DE MAXIMIS ET MINIMIS.

[Première Partie.]

Ostenditur quae ratio sit regulae Fermattij, cujus exempla inferius à Schotenio asscripta sunt,[2] *dein alia docetur brevior.*[3]

Esto data positione recta ED et puncta A, B: oporteatque invenire in ED punctum C, unde ductis CA, CB, quadrata earum simul sumpta sint minima quae esse possint.[4] Sit AE ∞ a, BD ∞ b (hae autem perpendiculares intelliguntur ad ED quae sit c). Secundum Fermattij regulam ponitur primum EC si velimus ∞ x unde summa quadratorum AC, CB invenitur $aa + 2xx - 2cx + cc + bb$. Deinde pro eâdem EC ponitur $x+y$, indeque inventâ rursus summâ quadr.orum AC, CB $aa + 2xx + 2yy +$

[Fig. 1.]



[1]) La pièce, que nous avons divisée en trois parties, se trouve aux pages 217—225 du manuscrit N°. 12. La *première* partie contient une exposition de la méthode „De maximis et minimis" de Fermat, suivie d'une autre méthode, inventée à cette occasion: la *seconde* une modification, apportée par Huygens à la méthode de Fermat, avec application à un problème suggéré par la pièce N°. VIII; la *troisième* la démonstration d'une construction simple par laquelle Huygens avait résolu le problème en question.

[2]) Consultez sur la méthode de Fermat et sur les exemples de van Schooten, qui se trouvent aux pages 284—287 du manuscrit N°. 12, la page 19 du Tome XI.

[3]) Il s'agit de la méthode dont l'exposition commence avec le second alinéa de la page suivante; mais voyez plus loin la note 13.

[4]) On retrouvera le même exemple dans la „Demonstratio regulae de maximis et minimis", cité dans la note 1 de la Lettre N°. 2435 (p. 95 du T. IX),

$+ 4xy - 2cy - 2cx + cc + bb$, horum aequatio instituitur ubi aequalibus ablatis utrimque fit $2yy + 4xy \infty 2cy$. Tum per y dividitur fitque $2y + 4x \infty 2c$. Denique termini in quibus y reperitur rejiciuntur ut hic $2y$, et restat $4x \infty 2c$ et $x \infty \frac{1}{2}c$. Horum ratio ut intelligatur oportet quantitatem y ab initio alicujus magnitudinis lineam denotare ut CF; Illud enim revera quaeritur, nimirum EC existente $\infty\ x$ quanta debeat esse CF, ut ductis FA, FB, harum duarum quadrata aequentur quadratis CA et CB. Semper quippe ubi maximum vel minimum quaeritur, utrimque casus aequalitatis existit. Itaque quum in aequatione inveniatur $- 4x + 2c \infty 2y$ vel $c - 2x \infty y$ hoc significat, si x, EC, pro determinatae magnitudinis linea sumatur tum CF, y, fore $c - 2x$, vel si certa statuatur CF, y differentia nempe duarum EC, EF, tum EC, x fore $\frac{1}{2}c - \frac{1}{2}y$. Patet autem, quanto minor statuetur y, tanto minus differre x ab $\frac{1}{2}c$ quare si aequalis nihilo sit y, erit x aequalis $\frac{1}{2}c$. Hincque manifestum est, quod si EC ponatur $\infty \frac{1}{2}$ ED et ducantur CA, CB harum quadrata minima erunt quae esse possunt, tunc enim casus aequalitatis nullus esse poterit, et ponendo CF quamlibet exiguam si major sit quam nihil, erunt quadrata FA, FB majora quam CA, CB. [5])

Illud autem quod modo dictum est considerans, quod nempe ubi de maximis vel minimis inquiritur, semper utrimque aequalitatis casus existit, alium quoque modum ad ea determinanda inveni. Animadverti enim, quod si problema de maximo vel minimo determinando propositum, sic resolvatur quasi non maximum vel minimum sed dato aequale quaeramus, tum semper aequatio invenietur in qua radix quaesita habebit duos valores, quorum uterque proposito satisfaciet, qui quidem diversi erunt; at quanto minus inter se differunt, tanto propius ad casum determinationis accedunt, ita ut ubi alter alteri aequalis existit ibi sit determinatio minimi vel maximi. Ubi igitur quaerendo dato aequale, ut dixi, ad aequationum perveneris, et volueris ex ea maximum vel minimum reperire, ita ipsam expendes tanquam duos valores habentem, sibi mutuo aequales. itaque scibis singulos ejus terminos cum singulis terminis alius aequationis comparari posse quae oritur ex multiplicatione radicis quaesitae, multatae quantitate sibi aequali, in seipsam. quod productum si non tot habet dimensiones quot aequatio proposita, rursus ducendum erit in aliam quantitatem quae deficientes alteri dimensiones contineat, suppleatque; secundum ea quae docet Cartesius lib. 2. Geom. ubi tangentes invenire docet. [6]) Hoc pacto si punctum C quaesiverimus in exemplo praecedente,

---

[5]) Huygens ajoute en marge: „Ponendo y pro differentia radicum, ita ut certam lineam significet, quaeritur quanta futura sit radix minor, ut aequalia sint quadata AC, CB quadratis AF, FB." Il s'agit ici des deux racines qu'on obtient en égalant l'expression $aa + 2xx - 2cx + cc + bb$ à une constante.

[6]) La méthode de Descartes, pour trouver les conditions sous lesquelles une équation algébrique quelconque possède deux racines égales, est exposée aux pages 418—423 du T. VI de l'édition d'Adam et Tannery; où on lit: „De plus, il faut considerer que, lorsqu'il y a deux

oportet inventam ſummam quadratorum AC, CB, aequare certo ſpatio dd, quaſi propoſitum habeamus invenire punctum unde ductis CA, CB, quadrata earum ſpatio alicui dd aequalia habeantur. Itaque ſcribe $aa + 2xx - 2cx + cc + bb \infty dd$, vel $xx - cx + \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}cc - \frac{1}{2}dd + \frac{1}{2}bb \infty 0$. Poſtea aliam aequationem finge ponendo $x \infty e$, et $x - e \infty 0$, quod ductum in ſeipſum faciet $xx - 2ex + ee \infty 0$. Si itaque praecedens aequatio minimi determinationem continet, debet habere x duos valores aequales, ideoque ſingulos ejus aequationis terminos ſingulis terminis poſterioris aequare licet. Primus utrimque eſt plane idem, itaque ſecundus comparetur faciendo $- cx \infty - 2ex$ unde invenitur $e \infty \frac{1}{2}c$ hoc eſt $x \infty \frac{1}{2}c$. Quod inveniendum erat. Caeterum comparando terminos poſtremos $\frac{1}{2}bb + \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}cc - \frac{1}{2}dd \infty ee$, invenietur quantitas $dd \infty aa + cc - 2ee + bb$ hoc eſt, $dd \infty aa + bb + \frac{1}{2}cc$; nam $- 2ee$ eſt $- \frac{1}{2}cc$, quoniam inventum fuit $\frac{1}{2}c \infty e$. Et hoc quidem determinationem exhibet in caſu quo datum foret problema ut dato aequale quaeratur, deberet enim dd non minus dari quam $aa + bb + \frac{1}{2}cc$; ſed cum maximum vel minimum quaeritur ſufficit inveniſſe quocunque modo quantitatem x; et quoniam dd tunc tantum imaginarium eſt, oportet invenire x aequalem quantitati cognitae quae non admixtum habeat d, quod ſemper fieri poteſt. [7]) Rationem autem comparationis aequationum mox oſtendam, ubi exemplum cubicae aequationis explicavero. Sint lineae angulum rectum continentes BE, BF et datum intra angulum punctum D, oporteatque ducere EDF rectam omnium breviſſimam. [8]) Ductis perpendicularibus DC, DA datae ſunt BC ∞b et BA ∞a. Sit autem AF ∞x ergo quoniam AF ad AD ut DC ad CE erit haec $\infty \frac{ab}{x}$ et tota BE ∞ $\infty b + \frac{ab}{x}$; cujus quadratum $\frac{bbxx + 2ab^2x + aabb}{xx}$ addatur ad quadratum BF $aa + 2ax + xx$ ſumma eſt

[Fig. 2.]

racines esgales en vne equation, elle a necessairement la mesme forme que si on multiplie, par soy mesme, la quantité qu'on y suppose estre inconnuë, moins la quantité connuë qui luy est égale; & qu'après cela, si cette derniere somme n'a pas tant de dimensions que la precedente, on la multiplie par vne autre somme qui en ait autant qu'il luy en manque : affin qu'il puisse y auoir separement equation entre chascun des termes de l'vne & chascun des termes de l'autre."

Ainsi, pour traiter une équation de la sixième dimension, c'est-a-dire du sixième degré, Descartes égale identiquement le premier membre de l'équation à l'expression : $(yy - 2ey + ee)(y^4 + fy^3 + ggyy + h^3y + k^4)$.

[7]) Huygens ajoute en marge : „aliquando ex aequatione quadrata, etiam tertius terminus comparari debet ipsi ee, nempe si in secundo termino quantitas d habebitur."

[8]) Ce problème s'est présenté à Huygens à propos de la „determinatio" du problème, traité dans

$$\frac{bbxx + 2abbx + aabb + aaxx + 2ax^3 + x^4}{xx} \infty dd \text{ qu. EF},$$

imaginari enim oportet lineam EF datae d aequalem inveniendam esse. itaque erit

$$\begin{array}{l} x^4 + 2ax^3 + aaxx + 2abbx + aabb \infty 0 \\ \qquad\qquad\quad + bbxx \\ \qquad\qquad\quad - ddxx \end{array}$$

Formetur porro alià aequatio quarum haec comparetur. Sit $x \infty e$ vel $x - e \infty 0$ quod in se ductum dat $xx - 2ex + ee \infty 0$ caeterum quoniam duae hic dimensiones desunt per aliam quantitatem multiplicetur quae secundum Cartesium erit $xx +$ $+ fx + hh$

$$\text{fitque } \begin{array}{l} x^4 + fx^3 + hhxx + eefx + eehh \infty 0 \\ \quad - 2ex^3 + eexx - 2ehhx \\ \qquad\qquad - 2efxx \end{array}$$

Comparetur terminus secundus hujus aequationis cum secundo praecedentis ergo $f - 2e \infty 2a$ et $f \infty 2a + 2e$. Porro ultimus cum ultimo ergo $eehh \infty aabb$ et $hh \infty \frac{aabb}{ee}$. nunc denique penultimus cum penultimo aequationis prioris: nam tertius cum tertio comparandus hic non est, quoniam habet quantitatem imaginariam d. Ergo $eef - 2ehh \infty 2abb$. vel ponendo pro f et hh, ea quibus aequalia inventa sunt erit

$$2aee + 2e^3 - \frac{2aabb}{e} \infty 2abb$$

$e^4 + ae^3 \infty abbe + aabb$ quod utrimque dividitur per $e + a$ et fit $e^3 \infty abb$ vel $x^3 \infty abb$ nam x erat ∞e. Debet itaque AF esse una e medijs proportionalibus inter BA et BC, ut fiat FDE omnium brevissima quae per punctum D ducuntur inter lineas BF, BE.

ad comparationes aequationum quod attinet, apparet equidem quam eae rationem habeant in aequationibus quae quadratum non excedunt, ut in priori horum

---

la pièce N°. VIII. Comparez la p. 40 du Tome présent à commencer par les mots: „Determinatio autem problematis solida est," etc

Ajoutons qu'en 1657 Huygens posa le même problème à De Sluse dans sa lettre du 27 juillet (p. 41 du T. II). De Sluse ne manqua pas de reconnaître l'identité du problème avec celui de trouver les deux moyennes proportionelles entre les lignes AB et BC et de le résoudre au moyen de l'artifice indiqué par Héron et que nous avons mentionné dans la note 10, p. 40 du Tome présent. Voir la réponse de De Sluse du 31 juillet 1657 (p. 43 du T. II).

exemplorum. Nam in quacunque aequatione quadrata, ſi ſciam radicem habere duos valores aequales, poſſum ſingulos eorum invenire per ejusmodi comparationem; sic poſito

$$\begin{aligned} xx - ax &+ ac \text{ aequale nihilo,} \\ - bx &+ bc \\ - cx & \end{aligned}$$

ſi conſtet x valere duas quantitates aequales comparo $a + b + c$ cum $2e$ nempe ſecundum terminum cum ſecundo meae aequationis quam formavi $xx - 2ex + ee$. ſitque $e \infty \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$ itaque valor uterque radicis x eſt $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$. Quod ſi invenire velim ex qua multiplicatione propoſita aequatio ſit orta, comparo porro ultimos terminos $ee \infty ac + bc$, ſeu quoniam e erat inventum $\infty \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$, fiet

$$ac + bc \infty \frac{aa + 2ab + bb + 2ac + 2bc + cc}{4}$$

$$aa + 2ab - 2ac - 2bc + bb + cc \infty 0.$$

quare ejus radix $a + b - c \infty 0$; $a + b \infty c$ unde e quae erat $\infty \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$ erit nunc $\infty a + b$ vel ∞c nam haec ſunt aequalia. itaque orta eſt aequatio propoſita ex multiplicatione $x - a - b \infty 0$ per $x - c \infty 0$, ſuntque valores duo aequales radicis x, c et $a + b$. Omnes aequationes quadratae productae ſunt hoc modo ex multiplicatione radicis in ſe ipſam multatae quantitatibus ſibi aequalibus, ideoque non mirum, quod ubi duae iſtae quantitates aequales ſunt, ſecundus terminus aequetur $- 2ex$ hoc eſt $- 2xx$ nam idem eſt ac ſi $x - x$ multiplicatum ſit in $x - x$. quod vero $x - e$ ponitur $\infty 0$ adſcita litera $e \infty x$, hoc fit ut terminorum ordo cum diſtinctione habeatur.

Porro in cubicis et quadratoquadraticis alijsque aequationibus, talem formare oportet aequationem, ut totidem dimenſiones et conſequenter tot valores diverſos habeat x quot ſunt in illa aequatione cui comparari eam neceſſe eſt. Ut in exemplo horum poſteriori, primum quidem formo aequationem quadratam $xx - 2ex + ee$, quae duos valores habet eosque aequales; at quoniam hanc quadratoquadraticae conferre nequeo, ducenda eſt porro in aliam aequationem quadratam, cujus quidem radicis valores ijdem ſupponuntur cum duobus valoribus radicis aequationis primariae quos habebat praeter duos aequales. nam non aliter termini ſinguli unius aequationis aequari poſſunt ſingulis terminis alterius niſi radix illius omnes eosdem habeat valores aequationis hujus. quod autem ibi multiplicavi per $xx + fx + hh$, ſciendum eſt hanc eſſe quadratam aequationem in qua x habet duos valores licet falſi ſint, nempe $- \frac{1}{2}f + \sqrt{\frac{1}{4}ff - hh}$ et $- \frac{1}{2}f - \sqrt{\frac{1}{4}ff - hh}$. Hi itaque valores x aequales ſupponuntur duobus iſtis quos habebat x in primaria aequatione praeter duos inter ſe aequales. quare ducto $xx - fx + hh \infty 0$

in $xx - 2ex + e^2 \infty 0$ recte aequatio inde producta cum priori secundum singulos terminos confertur, eo quod singuli quatuor valores radicis in una singulis in altera aequales supponantur; ex isto autem supposito, omnia consequenter inveniuntur quae requiruntur ut quod suppositum est verum esse possit, itaque primum invenitur $f \infty 2a + 2e$ et $hh \infty \frac{aabb}{ee}$ deinde e^3 seu $x^3 \infty abb$.

Nihil autem interest quae signa + et — sint in $xx + fx + hh$ quae quantitas ducta est in $xx - 2ex + ee$ supplendi dimensiones gratia. quia postmodum quantitates f et hh rursus eliminantur.

Potuisset etiam loco aequationis $xx + fx + hh \infty 0$ aliae sumi ut $xx - fx - hx + fh \infty 0$, orta ex $x - f \infty 0$ per $x - h \infty 0$; item $xx.fx.fh$, et quaelibet praeter has, dummodo praeter x duas alias literas habeant, ductaque in $xx - 2ex + ee$, omnes dimensiones forment quae sunt in aequatione prima. Sed omnium commodissime sumitur $xx.fx.hh$, quod Cartesius praescribit[9]). Sciendum autem est, nihil esse aliud, tangentem quaerere secundum ipsius methodum[10]) quam ex certo puncto ducere lineam rectam brevissimam earum quae possunt, lineae curvae occurrentem. Et licet aliquando hoc sit solidum,[11]) et tangentem tamen ad datum in curva punctum ducere planum sit, utrumque ea ratione simul construere discimus et discernitur simul quodnam è duobus solidum quodve planum sit. Illud modo observandum est, quae quantitas duos diversos valores habere possit, cum problema ita resolvitur ut non brevissimam, sed certae lineae aequalem ducere quaeramus.

[SECONDE PARTIE.] [12])

Methodus autem Fermatij in solidis problematibus plerisque et praecipue ad tan-

---

[9]) Au lieu cité dans la note 6, Descartes n'emploie que le signe + dans le facteur en question; mais il remarque à propos de ces signes: „Mesme il est a remarquer, touchant la derniere somme,... $y^4 + fy^3 + ggyy + h^3y + k^4$, que les signes, + & —, y peuuent estre supposés tels qu'on veut, sans que la ligne v" [qu'il s'agit de déterminer en égalant les coefficients des deux équations] „se trouve diverse pour cela, comme vous pourrés aysement voir par experience: car, s'il falloit que ie m'arestasse a demonstrer tous les theoresmes dont ie fais quelque mention, ie serois contraint d'escrire vn volume beaucoup plus gros que ie ne desire".

[10]) On sait que Descartes remplace la recherche de la tangente à un point donné C d'une courbe, dont l'équation est connue, par celle de la normale. Pour trouver cette dernière il cherche sur l'axe des coordonées un point P situé de telle manière que le cercle, décrit avec le rayon CP du point P comme centre, touche la courbe donnée au point C, ce qui exige que l'équation, qui sert à determiner les intersections du cercle avec la courbe, possède deux racines égales. Comparez les pages 413—419 du T. VI de l'édition d'Adam et Tannery.

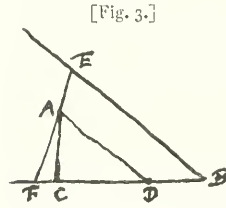
[11]) Comparez p. e. le § 7, p. 32 et 33 du T. XI.

[12]) L'état du manuscrit fait présumer que la seconde et la troisième partie n'ont été ajoutées à la première qu'après un certain laps de temps; la seconde probablement avant et la troisième,

gentes inveniendas facilior eſt atque expeditior, ſi ſic ea utamur ut jam dicetur. [13])

Poſtquam quaeſtionem ſic reſolventes quaſi dato aequale quaeratur ad aequationem pervenimus, oportet ut illud ſuppoſitum datum unam aequationis partem faciat, quod plerumque ſpontè contingit. Deinde oportet ponere $x + y$ vel $x - y \infty x$; ſed commodius $x + y \infty x$ ponetur. et in omnibus quantitatibus aequationis ubi habetur x, ſcribendum eſt $x + y$, ita ut quaecunque quantitates per x multiplicatae vel diviſae ſint multiplicentur per $x + y$ vel dividantur. atque idem obſervandum in omnibus poteſtatibus x, ut ſcilicet pro xx et x^3 et x^4 &c. ſubſtituantur quadrata, cubi, quadratoquadrata ab $x + y$. Neque tamen integras poteſtates ab $x + y$ ſcribere eſt opus, ſed partes omnes earum omitti poſſunt in quibus plura quam unum y continentur. [14]) Ita ex quadratoquadr.° ab $x + y$, nihil aliud ſumendum quam $x^4 + 4x^3y$. ex cubo nihil niſi $x^3 + 3xxy$; ex quadrato $xx + 2xy$. ſed et x^4, x^3, et xx, ex hiſce omitti ſic poſſunt, ut pro ſcriptis habeantur, et deletis contra terminos omnes aequationis primae. Nam quae ſcimus deletum iri ea ſcribi non eſt neceſſe.

[Fig. 3.]



Eſto datus angulus EBF, et intra ipſum A punctum. Oporteatque ducere EAF breviſſimam quae per punctum A intra datum angulum duci poſſit. [15])

Sit AD parallel. EB, et AC perpend. ad BF. Et lineae datae vocentur $a \infty$ BD; $b \infty$ DA; $c \infty$ DC et ponatur quoque EF $\infty\, d$ quaſi data eſſet. ſitque DF $\infty\, x$, quaeſita.

$$\text{BF } (x + a) \text{ ad FE } (d) \text{ ut DF } (x) \text{ ad FA } \left(\frac{dx}{x + a}\right)$$

12.2.Eucl.[16]) $\text{q.AD}(bb) + \text{q.DF}(xx) - \text{q.FA}\left(\frac{ddxx}{xx + 2ax + aa}\right) \infty 2 \square \text{FDC}(2cx)$

$$\frac{\begin{matrix} x^4 + 2ax^3 + aaxx + 2abbx + aabb \\ \quad -2c \quad + bb \quad -2aac \\ -4ac \end{matrix}}{xx} \infty dd$$

qui est écrite sur une feuille détachée, insérée au manuscrit, après le 22 déc. 1652; date de la pièce qui suit dans le manuscrit et qu'on retrouvera dans le Tome qui contiendra les travaux de dioptrique.

[13]) Il nous semble probable que Huygens, en composant cette seconde partie, est revenu sur l'opinion qu'il avait exprimée dans la suscription de la première, savoir, que la méthode alternative, qu'il a développée dans cette première partie, serait plus brève que celle fondée sur la régle de Fermat.

[14]) Comparez la note 11 p. 48 du T. XI.

[15]) Voir la note 8. Maintenant il s'agit de la „determinatio" dans le cas le plus général du problème de la pièce N°. VIII.

[16]) Voir la note 15, p. 29 du Tome présent.

Sit jam $x + y \infty x$ et ſubrogetur ubique ejus quantitas, in quantum opus erit, fit aequatio comparanda cum priori.

$$\frac{\begin{matrix} x^4 + 2ax^3 & + aaxx & + 2abbx & + aabb \\ -2c & + bb & -2aac & + 2abby \\ +4y & -4ac & +2aay & -2aacy \\ & +6ay & +2bby & \\ & -6cy & -8acy & \end{matrix}}{xx + 2xy} \infty dd$$

adaequantur [17])

Poſt alternas per denominatores multiplicationes aequaliumque ablationem fit

$$\begin{matrix} 2x^5 + 2ax^4 + 2aacxx - 2aab^2x \infty 0 \\ -2c \quad -2abb \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x^4 + ax^3 + aacx - aabb \infty 0 \\ -c \quad -abb \end{matrix}$$

Quando c eſſet ∞ o hoc eſt angulus EBF rectus, aequatio dividi poſſet per $x + a$, fieritque $x^3 - abb \infty 0$ ſicut antea quoque inventum eſt. [18])

Quando autem $a \infty b$; dividi poteſt per $x - a$, ideoque tum $x \infty a$ et tum planum eſt problema.

[Troisième Partie.]

Problematis hujus conſtructio (ſuperius allata [19]) hic demonſtranda eſt, erat autem hujuſmodi.

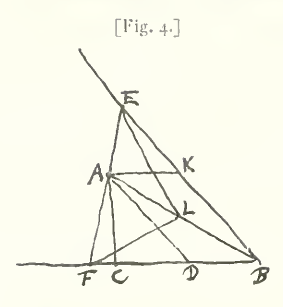
Juncta AB [Fig. 4.] dividatur biſariam in L; poſitâque regula ad punctum

[17]) C'est-à-dire les deux valeurs obtenues pour dd.

[18]) Voir la *première partie* à la page 63. Plus tard, Huygens s'est aperçu que la division par $x+a$ se pouvait accomplir également au cas général. Ainsi à côté de la dernière équation biquadratique du texte, il écrivit: „dividi potest per $a + x$" et à l'autre côté le résultat de la division, c'est-à-dire: „$x^3 - cxx + acx - abb \infty 0$"

[19]) Voir la pièce N°. VIII. p. 40 du Tome présent, ligne 7 d'en bas, à commencer par les mots: „Etenim dato intra angulum BAC puncto D," etc.

[Fig. 4.]



A, ea tam diu moveatur donec positionem habeat FE, faciens LE, LF inter se aequales, fietque EF omnium brevissima quae per punctum A intra angulum EBF duci possunt. Idem quoque factum fuit supra per intersectionem hyperboles et circuli,[20]) sed utrimque eadem est ratio.

Ducantur AD, AK parallelae EB, BF, et AC perpendicularis in FB. et nomina linearum serventur quae posita fuere.[21]) Ergo existentibus FL, LE inter se aequalibus ostendendum est

$$\begin{aligned} x^4 + ax^3 + aacx - aabb \infty o \text{ [22])} \\ - cx^3 - abbx \end{aligned}$$

Quia in triangulo AEB ducta est EL ad mediam basin AB erunt quadrata AE et EB dupla simul quadratorum AL et LE, similiterque in triangulo AFB erunt quadrata AF, FB simul dupla quadratorum AL, LF. Ergo si qu.LF aequale qu.° LE, erunt qu.ª AF, FB simul aequalia qu.is AE, EB.

p. 12.2. Elem.[16])

$$\text{q. AF} \infty bb + xx - 2cx$$

$$\text{q. DF}(xx) \text{ ad q. AF } (bb + xx - 2cx) \text{ ut q. AK}(aa) \text{ ad q. AE}\left(\frac{aabb + aaxx - 2aacx}{xx}\right)$$

$$\text{q. FB} \infty aa + xx + 2ax$$

$$\text{q. DF}(xx) \text{ ad q. DA}(bb) \text{ ut q. FB}(aa + xx + 2ax) \text{ ad q. BE}\left(\frac{bbaa + 2abbx + bbxx}{xx}\right)$$

$$\text{q. AF} + \text{q.FB} \quad bb + aa + 2xx + 2ax - 2cx \infty$$

$$\infty \frac{aaxx + bbxx - 2aacx + 2abbx + 2aabb}{xx} \quad \text{q. AE} + \text{q. BE.}$$

$$x^4 + ax^3 - cx^3 \infty abbx - aacx + aabb$$

$$\begin{aligned} x^4 + ax^3 + aacx - aabb \infty o \\ - cx^3 - abbx \end{aligned}$$

$$\text{div. per } x + a \qquad x^3 - cxx + acx - abb \infty o \text{ [23])}$$

[20]) Voir la page 41 du Tome présent à commencer par les mots; „Aliter quoque ijsdem positis," etc.

[21]) Voir la *seconde partie* à la page 66.

[22]) C'est l'équation finale de la *seconde partie*.

[23]) Cette dernière ligne a été ajoutée après coup. Comparez la note 18.

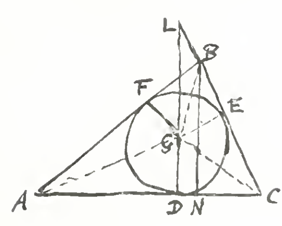
XV.[1]

1653.

22 Jan. 1653.

Inventio regulae qua utimur ad inveniendam ex lateribus aream trianguli.

Sit triangulum ABC cujus data sint latera, et oporteat aream invenire. Ponatur intra triangulum circulus descriptus GDFE, et ductae ex centro G ad latera perpendiculares GD, GE, GF quas constat esse aequales, ideoque cum triangulum ABC sit aequale tribus triangulis AGC, CGB, BGA, erit idem aequale triangulo cujus basis aequalis tribus AB, BC, CA et altitudo GD. Igitur quaerenda est GD.



Sit AB ∞ a, BC ∞ b, CA ∞ c et DC ∞ y. Ergo et CE ∞ y. Ergo BE sive BF ∞ $b - y$, et proinde AF ∞ $a - b + y$.

$$\text{AF } a - b + y \infty c - y \text{ AD}.$$

$$\text{DC} \quad y \infty \frac{c + b - a}{2}.$$

Sit nunc GD ∞ x et ducatur BN perpend. ad AC et producantur CB, DG donec occurrant sibi mutuo in L. Per 13. lib. 1.[2]) Elem. est CN ∞ $\frac{cc + bb - aa}{2c}$. haec vocetur e: et propter △[la] similia erit

[1]) La pièce occupe les pages 235 et 236 du manuscrit N°. 12. Elle contient une déduction de la formule de Héron.

[2]) Lisez „per 13. lib. 2." et consultez la note 18, p. 30 du Tome présent.

$$\text{q. CN } (ee) \text{ ad q. NB } (bb - ee) \text{ ut q. CD } (yy) \text{ ad q. DL } \frac{bbyy - eeyy}{ee}$$

item

$$\text{CN } (e) \text{ ad CB } (b) \text{ ut EG } (x) \text{ ad } \frac{bx}{e} \text{ GL} \quad \text{a[dde]}$$

$$x \text{ GD}$$

$$\frac{bx + ex}{e} \text{ DL}$$

$$\text{q. DL} \quad \frac{bbxx + 2bexx + eexx}{ee} \infty \frac{bbyy - eeyy}{ee} \text{ qu. DL}$$

$$xx \infty \frac{bbyy - eeyy}{bb + 2be + ee} \infty \frac{byy - eyy}{b + e}$$

$$\begin{matrix} (b+e) & & (b-e) & & (yy) \\ \frac{bb+2bc+cc-aa}{2c} & \text{ad} & \frac{aa-bb+2bc-cc}{2c} & \text{ut} & \frac{bb+2bc+cc-2ac-2ab+aa}{4} \text{ ad } xx \end{matrix}$$

denominator primi et fecundi termini quia idem eft aufertur; deinde primus et tertius terminus dividi poffunt per $b + c - a$. Et fit

$$b + c + a \text{ ad } \frac{b + c - a}{4} \text{ ut } aa - bb + 2bc - cc \text{ ad } xx.\text{ [3]}$$

Quia vero GD, x, ducta in $\frac{a + b + c}{2}$ dimidium summae laterum, producit aream trianguli ABC, apparet eandem quoque provenire si xx duçatur in quadratum ex $\frac{a + b + c}{2}$, et ex producto radix extrahatur. Sed xx eft illud quod oritur ex producto terminorum tertij et fecundi, ultimo pofitorum, divifo per primum qui eft $a + b + c$. Ergo quoniam hoc multiplicari rurfus deberet per qu. ex $\frac{a + b + c}{2}$ apparet tantum opus effe ut fecundus terminus in tertium ducatur et hoc productum rurfus in $\frac{a + b + c}{4}$, atque ex ultimo producto radix eliciatur: Atque hanc fore aream trianguli quaefitam.

Oportet igitur multiplicare $aa - bb + 2bc - cc$ per $\frac{b + c - a}{4}$ et horum pro-

[3]) Huygens annota en marge: „Theorema ad inveniendum femidiametrum circuli in triangulo."

ductum per $\frac{a+b+c}{4}$. Hoc autem idem eſt ac ſi haec tria multiplicentur, nempe $\frac{aa-bb+2bc-cc}{4}$ et $\frac{b+c-a}{2}$ et $\frac{a+b+c}{2}$. Sed $\frac{aa-bb+2bc-cc}{4}$ oritur ex multiplicatione $\frac{a-b+c}{2}$ in $\frac{a-c+b}{2}$. Itaque haec quatuor multiplicanda ſunt, videlicet, $\frac{a-b+c}{2}$ et $\frac{a-c+b}{2}$ et $\frac{b+c-a}{2}$ et $\frac{a+b+c}{2}$, et producti radix erit area trianguli ABC. Tres autem priores termini inveniuntur ſi ex dimidio ſummae laterum ſingula latera auferantur, eſtque quartus terminus ipſa medietas ſummae laterum.

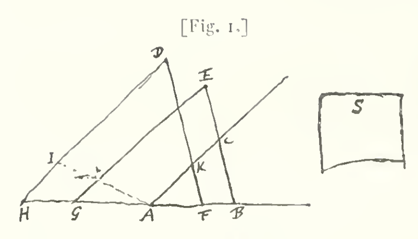
Igitur hinc regula manifeſta ſit quae ad aream trianguli inveniendam praecipit, ut ex dimidia ſumma laterum ſingula latera auferantur; et haec tria reſidua in ſe mutuo ducantur et in dimidium ſummae laterum, atque ut ex producto radix eliciatur.

XVI.[1]

1653.

19 Aug. 1653.

[Fig. 1.]



Dato positione angulo CAB et punctis extra ipsum D et E, propositum sit abscindere duabus inde eductis parallelis spatium KCBF aequale dato quadrato S.

Producatur BA et ducantur DH, EG parallelae CA, vocetur AG, *a*. GE, *b*. AH, *c*. HD, *d*. et quaeratur AF ∞ *x* facto autem triangulo IHA ∞ □S vocetur IH, *q*.

$$\text{FH } (x+c) \text{ ad HD } (d) \text{ ut FA } (x) \text{ ad } \left.\begin{matrix}\frac{dx}{x+c} \text{ AK} \\ x \text{ AF}\end{matrix}\right\} \text{m[ult.]}$$

$$\frac{dxx}{x+c} \square \text{ KAF}$$

$$\text{DH } (d) \text{ ad HF } (x+c) \text{ ut EG } b \text{ ad } \left.\begin{matrix}\frac{bx+bc}{d} \text{ GB} \\ a \quad \text{AG}\end{matrix}\right\} \text{f[ubt].}$$

$$\frac{bx+bc}{d} - a \quad \text{AB}$$

$$\text{fit } b \text{ ad } a \text{ ut } d \text{ ad } e \text{ ergo } \frac{eb}{d} \infty a \text{ ergo } \frac{bx+bc-eb}{d} \quad \text{AB}$$

---

[1]) La pièce est empruntée aux pages 237—240 du manuscrit N°. 12. Elle contient la solution d'un problème plan, menant à une équation quadratique. Dans l'analyse, par laquelle Huygens débute, il se sert d'expressions, comme dxx et $bb\,(xx+2rx+rr)$ de trois ou quatre dimensions. Puisque de telles expressions ne peuvent être tolérées dans les démonstrations à la mode des anciens, il montre ensuite de quelle manière on peut réussir à les éviter. Enfin il prépare, à la façon indiquée dans la Pièce N°. V (p. 25 du Tome présent), une „Compositio" et une „Demonstratio", capable d'être rédigée facilement en n'employant d'autres notions que les conceptions purement géométriques, admises par les anciens.

$$\text{fit } c - e \propto r \text{ ergo } \frac{bx+br}{d} \text{ AB} \quad \text{m[ult.]}$$

$$\text{FH } (x+c) \text{ ad HD } (d) \text{ ut AB } \frac{bx+br}{d} \text{ ad } \frac{bx+br}{x+c} \text{ AC}$$

$$\frac{bb \text{ in } (xx+2rx+rr)}{dx+dc} \; \square \text{ CAB}^{2)}$$

$$\text{sit } \frac{bb}{d} \propto l \quad \frac{l \text{ in } (xx+2rx+rr)}{x+c} \; \triangle \text{ CAB} \quad \text{f[ubt].}$$

$$\frac{dxx}{x+c} \; \triangle \text{ KAF}$$

$$cq \; \square \text{ HA} \propto 2 \, \text{trap. CKFB} \; \frac{l \text{ in } (xx+2rx+rr) - dxx}{x+c}$$

$$\frac{dxx}{x+c} \text{ eft } \frac{\frac{dlxx}{l}}{x+c} \text{ ergo } cq \propto \frac{l \text{ in } \left(xx+2rx+rr-\frac{dxx}{l}\right)}{x+c}$$

$$\text{ergo } x+c \text{ ad } l \text{ ut } xx+2rx+rr-\frac{dxx}{l} \text{ ad } cq.$$

Id quod hic fecimus femper agendum eft ut aequatio fit ejufmodi quae in proportionem refolvi poffit, idque fine folidorum mentione.

Proportio autem femel ordinata retinenda eft, aut fi nonnunquam ad aequalitatem redigatur, rurfus repetenda, donec ad fimpliffimos terminos deveniatur, ex quibus x innotefcat.

Verùm quia demonftrationis inveniendae gratia hujufmodi analyfis inftituta eft, oportet ut operatio omnis quae aequationem praeceffit argumentationis formam accipiat. Etenim poftquam repetendo analyfeos veftigia demonftratum erit quod

$$x+c \text{ ad } l \text{ ut } xx+2rx+rr-\frac{dxx}{l} \text{ ad } cq,$$

oportebit ex ifta quae aequationem praeceffit argumentatione oftendere quod

$$x+c \text{ ad } l \text{ ut } xx+2rx+rr-\frac{dxx}{l} \text{ ad trap. CKFB } 2$$

Itaque refolutione continua opus eft hujufmodi:

Factum ponatur, et fint conftructa quae fuperius diximus. Porro autem ut b ad a

ita fit d at e, ergo d ad b ut e ad a

sed d ad b ut $x+c$ ad GB

ergo $x+c$ ad GB ut e ad a

et $x+c-e$ ad e ut AB ad a

[2]) Ici et dans la suite les aires des parallélogrammes indiqués et du trapèze CKFB ne sont pas égales mais proportionnelles aux expressions algébriques qui les accompagnent.

et $x + c - e$ ad AB ut e ad a

ergo $x + c - e$ ad AB ut d ad b

ſed AB ad AC ut $x + c$ ad d

per pr. pert. [3]) ergo $x + c - e$ ad AC ut $x + c$ ad b

$c - e \propto r$ $x + r$ ad AC ut $x + c$ ad b

ſed $x + r$ ad AB ut d ad b

ergo ratio comp.ª ex $x + r$ ad AC et $x + r$ ad AB, hoc eſt Q. $x + r$ [4]) ad ▭ CAB eadem eſt compoſitae ex $x + c$ ad b et d ad b. Sit autem ut d ad b ita b ad l ergo Q $x + r$ ad ▭ CAB ut $x + c$ ad l. (nam ratio compoſita ex $x + c$ ad b et b ad l eadem eſt quae $x + c$ ad l.)

Itaque $x + c$ ad l ut Q. $x + r$ ad ▱ CAB α[5]).

Fiat jam ut l ad d ita xx ad $\frac{dxx}{l}$ deſignandum $\frac{dx}{l}$. [6]) Reductio ▱ KAF; eſt autem d ad $x + c$ ut ▱ KAF ad xx.

per perturb. [3]) ergo $x + c$ ad l ut $\frac{dxx}{l}$ ad ▱ KAF

α. [7]) ergo $x + c$ ad l ut Q $x + r - \frac{dxx}{l}$ ad ▱ CAB − ▱ KAF ſeu ▱ HHA (qc)

Æquatio ſuperius exhibita. [8])

Sit l ad q ut c ad p ergo $lp \propto qc$

ergo $x + c$ ad l ut Q. $x + r - \frac{dxx}{l}$ ad lp

sed ut $x + c$ ad l ita $px + pc$ ad lp

$$\text{ergo } xx + 2rx + rr - \frac{dxx}{l} \propto px + pc$$

$$xx + 2rx - px - \frac{dxx}{l} \propto pc - rr \qquad \text{Sit } pc - rr \propto ss$$

$$xx + 2rx - px - \frac{dxx}{l} \propto ss$$

---

[3]) Consultez sur l'opération; „ex aequali in proportione perturbata", la note 22, p. 304 du T. XI.

[4]) Lisez: $(x + r)^2$.

[5]) L'α est un signe de renvoi, voir la note 7.

[6]) C'est-à-dire en introduisant, pour le besoin de la rédaction à la mode des anciens, une ligne inconnue égale à $\frac{dx}{l}$. En effet, dans la Fig. 2 cette ligne est représentée par AN; voir la note 11.

[7]) Le signe de renvoi α veut dire que la proportion qui va suivre, se déduit de celle qui précède immédiatement, combinée avec celle marquée, quelques lignes plus haut, avec le signe α.

[8]) Voir les proportions de la page précédente qui commencent avec „$x + c$ ad l."

ergo x ad s ut s ad $x + 2r - p - \frac{dx}{l}$

sed ut s ad $x + 2r - p - \frac{dx}{l}$ ita ls ad $lx - dx + 2rl - pl$

ergo x ad s ut ls ad $lx - dx + 2rl - pl$

sit $l - d$ ad l ut $2r - p$ ad m ergo $lm - dm \infty 2rl - pl$

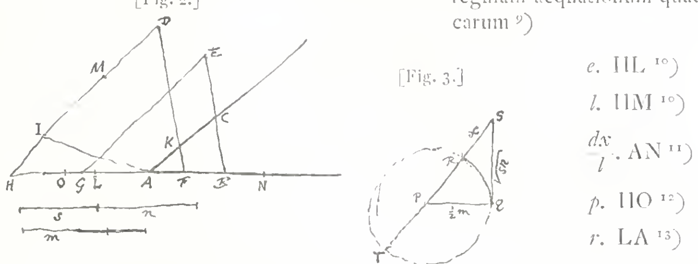
ergo x ad s ut ls ad $lx - dx + lm - dm$

sit $l - d$ ad l ut s ad n ergo $ln - dn \infty ls$

ergo x ad s ut $ln - dn$ ad $lx - dx + lm - dm$

ergo x ad s ut n ad $x + m$ et $xx + mx \infty sn$ quod componitur fecundum regulam aequationum quadraticarum [9])

[Fig. 2.] [Fig. 3.]



e. HL [10])

l. HM [10])

$\frac{dx}{l}$. AN [11])

p. HO [12])

r. LA [13])

Hinc demonftratio facile confcribetur per regreffum, cujus hoc fit initium; [14])
Rect. TSR [Fig. 3] aequale eft quadrato SQ, hoc eft $\square^{o} sn$,

ergo RS, x ad s ut n ad $x + m$, ST.

Sed ut n ad $(x + m)$ ita $nl - nd$ ad $xl - xd + lm - dm$

ergo x ad s ut $nl - nd$ ad $xl - xd + lm - dm$

&c.

---

[9]) Voir la figure 3.

[10]) On a $e = ad : b = $ AG × HD : GE ; $l = b^2 : d = $ GE^2 : HD. Ces constructions ne sont pas indiquées dans la figure.

[11]) Cette ligne AN ne peut pas être construite pour le moment. Elle n'est introduite que pour le besoin de la rédaction. Voir la note 6.

[12]) On a $p = qc : l = $ HI × HA : HM. Cette ligne se construit facilement en tirant IO parallèle à MA.

[13]) En effet $r = c - e = $ HA — HL. Ajoutons que les lignes s, m, n, qu'on trouve représentées en bas de la figure 2, ont été définies par les égalités $ss = pc - rr$; $m = (2r - p)\, l : (l - d)$; $n = ls : (l - d)$.

[14]) Comparez la note 5, p. 24, dernier alinéa.

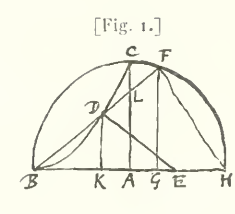
XVII. [1]

1653.

1ª Sept. 1653.

Inventio tangentis in Cissoide Dioclis.

[Fig. 1.]



Proprietas Ciſſoidis haec eſt ut ducta linea BF quae perpendicularem AC ex centro A eductam ſecet in L et Ciſſoidem in D, ſint aequales DL, LF. [2])

Sit AB ∞ a, BK ∞ x, BE ∞ v, ED ∞ s

BG $(2a - x)$ ad GF$\left(\sqrt{2ax - xx}\right)$ ut BK (x) ad $x\sqrt{\dfrac{2ax - xx}{2a - x}}$ KD

ergo $\dfrac{x^3}{2a - x}$ qu. KD
$vv - 2vx + xx$ q. KE } a[dde]

$$\frac{x^3}{2a - x} + vv - 2vx + xx \infty ss \,^{3)} \text{ q. DE}$$

---

[1]) La pièce se trouve à la page 241 du manuscrit N°. 12. Elle contient la détermination de la tangente à la cissoïde d'après la méthode de Descartes, décrite dans la note 10, p. 65 du Tome présent.

[2]) Cette propriété est une conséquence presque immédiate de la définition de la cissoïde, qu'on trouve dans les Commentaires d'Eutocius sur l'ouvrage „De sphaera et cylindro" d'Archimède. Voir T. III, p. 80—83 de l'édition de Heiberg, citée p. 50 du T. XI; p. 17—18 de l'édition de Bâle, citée p. 274 du même Tome.

[3]) Dans le texte, qui va suivre, la méthode de Descartes est employée jusqu'au bout. C'est-à-dire l'équation en x en tête de la page suivante, qu'on écrirait maintenant:

$$x^2 - \frac{v^2 - s^2 + 4av}{2(a + v)}x + \frac{a(v^2 - s^2)}{a + v} = 0$$

est identifiée terme pour terme avec l'équation $x^2 - 2ex + e^2 = 0$.

Or, dans un petit manuscrit qui a appartenu à son frère Philippe, décédé en mai 1657,

$$\frac{xx - yyx + 2ayy - 2ass \atop {+ssx \atop -4ayx}}{2a + 2y} \infty 0$$

Sit $x \infty e$ $\quad xx - 2ex + ee \infty 0$

Comparatio ultimi term. [4] $\frac{2ayy - 2ass}{2a + 2y} \infty ee$

a[dde] [5] $\begin{cases} yy - ee - \frac{yee}{a} \infty ss \\ - yy - 4ay \end{cases}$

Huygens a fait des notices et des calculs qui datent de 1657. On y rencontre à la page 31 une autre déduction de la relation qui doit exister entre x et v, basée sur la condition que ss doit être un minimum pour v constant, x variable.

De cette déduction il résulte qu'alors Huygens avait déjà apporté une nouvelle simplification à la méthode, employée p. 66—67 du Tome présent, pour trouver la valeur minimale ou maximale d'une fraction $\varphi(x) : \psi(x)$; cette simplification consiste, en notation moderne, à poser:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{y\,\varphi'(x)}{y\,\psi'(x)}$$

où y représente un petit accroissement de la variable x.

Voici, en effet, cette déduction:

$$„\frac{x^3}{2a - x} + vv - 2vx + xx \infty ss$$

$$\frac{2avv - xvv - 4avx + 2vxx + 2axx}{2a - x} \infty ss \infty \frac{-yvv - 4avy + 4vxy + 4axy}{-y}$$

$$-2avv + xvv + 4avx - 2vxx - 2axx \infty -2avv - 8aav + 8avx + 8aax + \\ + vvx + 4avx - 4vxx - 4axx$$

$$8aav - 8avx + 2axx \infty 8aax - 2vxx$$

$$4aav - 4avx + vxx \infty 4aax - axx$$

$$v \infty \frac{4aax - axx}{4aa - 4ax + xx}\text{"}$$

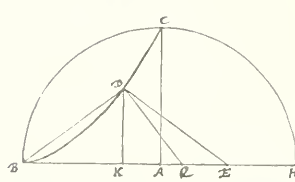
[4]) Comparez la note 6, p. 61 du Tome présent.

[5]) Le second terme de l'équation originale étant $\left(\frac{-vv + ss - 4av}{2a + 2v}\right)x$, Huygens additionne $-vv - 4av$ à la valeur de ss calculée d'après la formule précédente, pour égaler ensuite le coefficient obtenu à $-2e$.

Comp. fecund. term. $\frac{-ce - \frac{vee}{a} - 4av}{2a + 2v} \infty -2e$

$$v \infty \frac{4aae - aee}{4aa - 4ae + ee}$$

[Fig. 2.]



CONSTRUCTIO.

Jungatur BD [Fig. 2] et fint perpendiculares DK et DQ fuper AB et BD, eritque BQ $\frac{4aae - 2aee}{4aa - 4ae + ee}$.[6]) Porro ut KH ad HA ita fit KQ ad QE, eritque QE $\frac{aee}{4aa - 4ae + ee}$ quae addita ad BQ facit BE $\infty \frac{4aae - aee}{4aa - 4ae + ee}$ ut oportebat.

NB. BQ $\frac{4aae - 2aee}{4aa - 4ae + ee}$ eft idem q[uo]d $\frac{2ae}{2a - e}$. $4aa - 4ae + ee$ eft qu. KH.

Trianguli BFH,[7]) BDQ [8]) funt fimiles. Unde proportionales GB, BH : KB, BQ. Item HK, KB, KQ.

[6]) On a $BQ = BD^2 : BK = \left(e^2 + \frac{e^3}{2a - e}\right) : e = \frac{2ae}{2a - e} = \frac{4aae - 2aee}{4aa - 4ae + ee}$.
[7]) Voir la Fig. 1.
[8]) Voir la Fig. 2.

XVIII.

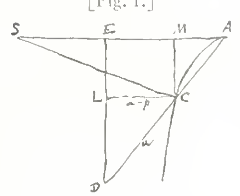
1653.

1 Sept. 1653.

Inventio tangentis in Conchoide 2.da[2])

Proprietas hujusce Conchoidis haec est, ut ductâ ex puncto A recta AD usque ad lineam ED, quae AD Conchoidem secet in C, sit semper CD aequalis perpendiculari AE.

[Fig. 1.]



Sit AE ∞ a ergo et CD ∞ a

AM ∞ p et ∞ $p + y$

AS ∞ v

SC ∞ s

q.LC $(aa - 2ap + pp)$ ad q.LD $(2ap - pp)$ ut q.AM (pp) ad

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{2ap^3 - p^4}{aa - 2ap + pp} \text{ q.MC} \\ vv - 2pv + pp \text{ q.MS} \end{array}\right\} \text{a[dde].}$$

[1]) La pièce est empruntée à la page 242 du manuscrit N°. 12. Huygens, pour trouver la tangente demandée, y emploie la méthode de Descartes, exposée dans la note 10, p. 65 du Tome présent, jusqu'au moment où il s'agit de déterminer la condition sous laquelle le cercle décrit de S comme centre avec le rayon SC touche à la courbe donnée. Alors, profitant de la remarque (voir p. 65 du Tome présent) que SC doit être la distance minimale de S à la courbe, Huygens va appliquer la méthode de Fermat, telle qu'il l'a simplifiée dans la seconde partie de la Pièce N° XIV, p. 65—67 du Tome présent.

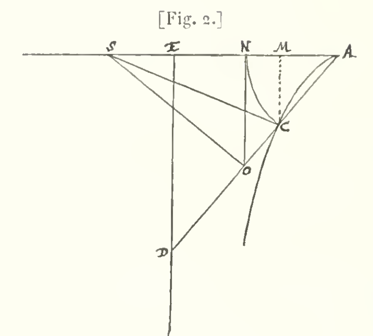
[2]) Il s'agit de la seconde branche de la conchoïde de Nicomède au cas particulier où le segment de longueur donnée est égale à la distance du pôle à la base.

$$\text{q.SC}\quad vv - 2pv + \frac{aapp}{aa - 2ap + pp} \infty vv - 2vp - 2vy +$$
$$+ \frac{aapp + 2aapy}{aa - 2ap - 2ay + pp + 2py}\ \text{q.SC}$$ [3])

$$\text{quadrato quadr.}\ \frac{a^4p - a^3pp}{a^4 - 4a^3p + 6aapp - 4ap^3 + p^4} \infty v \quad \text{fit EM}\ a - p \infty n$$

$$\frac{a^3p}{n^3} \infty v$$

[Fig. 2.]



CONSTRUCTIO.

Ducatur ACD, et ponatur AN ∞ AC, et fit NO parall. ED, et OS perpend. ad AO. Juncta SC occurret Conchoidi ad angulos rectos.

NB. AC eft $\frac{ap}{n}$ ergo $v \infty \frac{aa}{nn}$ in AC. proportionales autem funt AM, AC (cui aequ. AN) AO. Ideoque AM ad AO ut qu. AM ad qu. AC, five ut qu. EM ad qu. CD, hoc eft ut nn ad aa. Ergo ut AM ad AO ita AC ad v. Quare permutando ut AM ad AC h. e. ut NA ad AO ita AO ad v, hoc est AS.

---

3) La valeur de SC^2, pour $AM = p$, étant trouvée, Huygens écrit à côté celle qu'on obtient pour $AM = p + y$ et égale les deux valeurs, ce qui permet de calculer la valeur cherchée de $v = AS$.

Ajoutons que sur une feuille séparée la méthode de Descartes est poursuivie jusqu' à la fin, c'est-à-dire, en se servant de l'artifice exposé dans la note 6, p. 61 du Tome présent. Sur cette feuille, écrite d'une autre main, Huygens a annoté „Berkelij." Sans doute il s'agit de Abraham van Berekel, mentionné dans la note 2, p. 242 du T. I, qui, d'après la lettre N°. 163 de la même page, s'intéressait à des problèmes mathématiques.

XIX. [1]

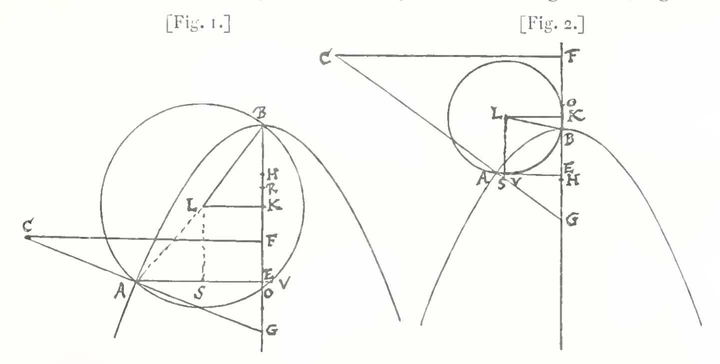
1653.

Problema. 17 Sept. 1653.

Data parabola et puncto extra ipſam, ducere ex eo rectam lineam quae parabolam ſecet ad angulos rectos.

Eſto data Parabola AB [Fig. 1, 2], punctumque C extra ipſam. Factum jam ſit quod proponitur, ut nempe CAG ſecet parabolam ad ang. rectos, ergo ducta

[Fig. 1.] [Fig. 2.]



perpend.^{i} AE erit EG dimidio lateri recto aequalis; ducatur autem et CF ad axem perpend. et ſit BF, a. CF, b, latus rectum r. et AE, x. ergo BE $\frac{xx}{r}$, et FG $\Big(\frac{xx}{r} + \frac{1}{2}r$ ℓ [2]) $a\Big)$ ad FC (b) ut GE ($\frac{1}{2}r$) ad EA (x).

$$\frac{x^3}{r} + \tfrac{1}{2}rx \;\ell\; ax \infty \tfrac{1}{2}br$$

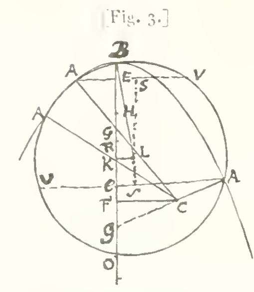
[1]) La pièce, empruntée à la p. 240 du manuscrit N°. 12, traite le même problème devant lequel Huygens s'était arrêté, il y avait huit ans, après avoir constaté qu' il menait à une équation cubique; voir les p. 32 et 33 du T. XI.

[2]) Ce signe indique qu'on doit intercaler + ou — selon les circonstances. Ainsi, dans l'expres-

$x^3 \infty - \frac{1}{2}rrx$ ℞ $rax + \frac{1}{2}brr$ et ſumendo r per unit.

$x^3 \infty - \frac{1}{2}rx$ ℞ $ax + \frac{1}{2}b$.

[Fig. 3.]



CONSTRUCTIO. Sit poſita BH [Fig. 1, 2] aequalis $\frac{1}{2}$ lateris recti, et diviſâ FH per medium in K ponatur KL perpend.is axi et aequalis $\frac{1}{4}$ FC: et centro L, ſemidiametro LB deſcribatur circulus qui ſecet parabolam in A, et ducatur CA; haec ſecabit parabolam ad angulos rectos. [3])

Puncto intra Parabolam dato eadem eſt Constructio [Fig. 3].

Poteſt autem circulus ſecare parabolam in uno duobus aut tribus punctis, quae omnia problemati ſatisfacient.

Alexander Anderſonus hoc Problema ſolidum eſſe ſcribit. [4]) Attamen ſi hoc idem eſt propter cujus conſtructionem Apollonius à Pappo reprehenditur, [5]) ut exiſtimat idem Anderſonus, manifeſtum erit veteres pro plano habuiſſe.

Quod ſane veroſimile videtur, namque ad conſtructionem Coni ſectione non eſt opus praeter Parabolam quae data eſt. [6])

sion pour FG du texte il faut mettre un *minus* au cas de la Fig. 1 et un *plus* au cas de la Fig. 2.

[3]) Pour arriver à cette construction Huygens n'avait qu'à appliquer textuellement la règle exposée par Descartes dans sa „Géométrie" (p. 465—467 du T. VI de l'édition d'Adam et Tannery) pour la résolution par construction de l'équation cubique: $x^3 =$ ℞ $px + q$.

[4]) Conférez avec le passage qui suit, les dernières phrases du premier alinéa de la Lettre N°. 163 (p. 242—243 du T. I) du 20 septembre 1653 à van Schooten et consultez sur Anderson et sur sa remarque la note 3 de cette lettre N°. 163.

[5]) Voici le passage en question, tel qu'on le trouve à la page 61 de l'édition de Commandin, citée dans la note 3, p. 259 du T. II (Hultsch. T. I, p. 270—273) „videtur autem quodammodo peccatum non paruum esse apud Geometras, cum problema planum per conica, vel linearia ab aliquo inuenitur. & ut summatim dicam, cum ex improprio soluitur genere, quale est in quinto libro conicorum Apollonii problema in parabola: & in libro de lineis spiralibus Archimedis: assumpta solida inclinatione in circulo. fieri enim potest, ut nullo vtentes solido problema ab ipso descriptum inueniamus."

[6]) Le même manuscrit N°. 12, d'où nous avons emprunté la pièce présente, contient encore, aux pages 252 et 253, sous l'inscription: „Problema Apollonij Perg. ex libro 5 Conic. resolutum supra" une solution et démonstration purement géométrique du même problème. Elles sont datées du 31 janvier 1655. On les rencontre avec des variantes peu importantes dans la pièce N°. 365, p. 533—534 du T. I et encore sur une feuille détachée qui fait partie des „Chartae mathematicae". La construction, qu' on y trouve exposée, est identique avec celle de la pièce présente.

Plus tard Huygens s'est occupé du problème plus général de mener d'un point donné les normales à une conique quelconque.

XX.[1]

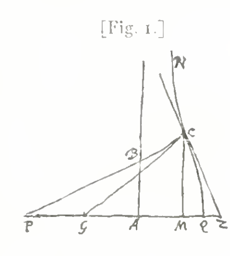
1653.

25. Sept. 1653.

In Conchoide Nicomedis invenire flectionis punctum.

Est Conchoides QCN. polus G, Asymptotus AB. Et ponatur inventum jam esse flexus punctum quod sit C. et ducatur tangens CZ. Igitur quoniam pars conchoidis CQ est cava versus G, necesse est tangentes omnes ad puncta inter C et Q, secare rectam GZ inter Q et Z item quia pars conchoidis reliqua CN convexa est versus G, omnes quoque tangentes ad puncta partis CN quantumlibet productae, rectam GZ secare necesse est inter A et Z. Igitur tangens CZ est ejusmodi, quae abscindat AZ aut GZ omnium maximam quae a tangente abscindi possunt. Sit GA, b. AQ, c. AM, y. Ergo CM erit ex proprietate Conchoides

[Fig. 1.]



$$\text{CM} \propto \sqrt{\frac{bbcc + 2bccy - bbyy - 2by^3 - y^4 + ccyy}{yy}}$$

Cum CP tangenti CZ est perp. est

$$\text{PM}\left(\frac{y^4 + by^3 + bccy + bbcc}{y^3}\right)^{2)} \text{ ad CM ut haec eadem CM}$$

$$\text{ad MZ } \frac{bbccy + 2bccyy - bby^3 - 2by^4 - y^5 + ccy^3}{bbcc + bccy + by^3 + y^4}$$

[1]) La pièce est empruntée aux pages 243—243*b* du manuscrit N°. 12. La construction qu'elle amène se retrouve avec des modifications de rédaction et des additions dans les „Illustrium quorundam problematum constructiones" de 1654 comme „Probl. VIII", et de même dans une lettre à Van Schooten du 23 octobre 1653, reproduite avec sa minute aux pages 243—246 du T. I.

[2]) Huygens ajoute en marge à ce propos „Vide infra ubi tangens conchoidis à Schote-

adde MA $\quad y$ ſub eodem denomin.

$$AZ \quad \frac{2bbccy + 3bccyy - bby^3 - by^4 + ccy^3}{bbcc + bccy + by^3 + by^4}$$

Poteſt numerator et denominator dividi per $b + y$

$$AZ \; \frac{2bccy + ccyy - by^3}{bcc + y^3} \infty \frac{2bccy + 2bccz + ccyy - 2ccyz - by^3 - 3byyz}{bcc + y^3 + yyz} \; AZ$$

Scriptis nempe ſcribendis ſecundum regulam de maximis et min. ponendo AM $\infty\, y + z$. [3])

$$6bccy^3z + 3ccy^4z - 3by^5z \infty 2bbc^4z + 2bccy^3z + 2bc^4yz + 2ccy^4z - 3bbccyyz - 3by^5z$$

$$y^4 + 4by^3 + 3bbyy - 2bccy - 2bbcc \infty 0 \quad \text{div. per } b + y$$

$y^3 + 3byy - 2bcc \infty 0$. Auferatur ſecund. term. pon.^{do} $q \infty y + b$ [4]) ſive GM; hoc eſt $q - b \infty y$ ſit

$$q^3 - 3bbq + 2b^3 - 2bcc \infty 0$$

$$q^3 \infty 3bbq + 2bcc - 2b^3$$

ſumptaque b pro unit.

$$q^3 \infty 3bq + \frac{2cc}{b} - 2b. \quad q \text{ eſt GM.}$$

Si $b \infty c$ erit $q^3 \infty 3b^2q$. $qq \infty 3bb$. Planum.
Item ſi $cc \infty 2bb$ erit $q \infty 2b$.

CONSTRUCTIO. [5])

Sicut GA ad AQ [Fig. 2 et 3] ita ſit AQ ad AE et ponatur ipſi GE aequalis GF. Porro ſit GR parall. AB et aequalis duplae AG, et deſcribatur parabola ver-

nio inventa est". Consultez la page 18 du T. XI, où la valeur de AP, trouvée par van Schooten, est indiquée.

[3]) Il s'agit de la méthode exposée au debut de la seconde partie du N°. XIV, p. 65—66 du Tome présent.

[4]) Comparez au Livre III de la „Géométrie" de Descartes l'article: „Comment on peut oster le second terme d'vne Equation", p. 449—450 du T. VI de l'édition d'Adam et Tannery.

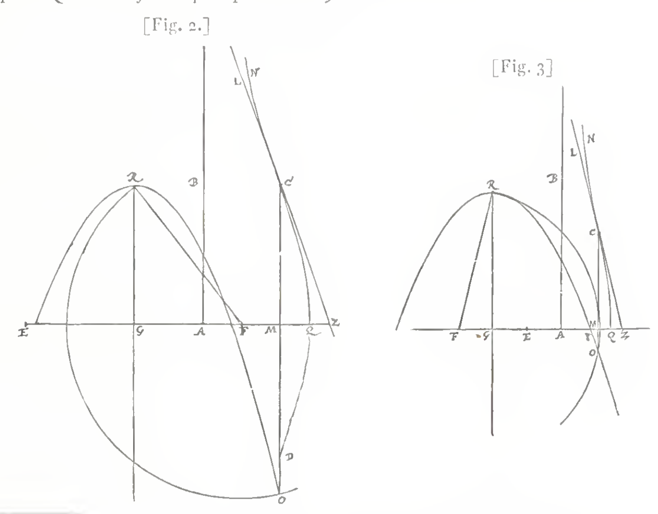
[5]) L'équation cubique en q une fois trouvée, Huygens, pour arriver à la construction qui va suivre, n'avait qu'à se servir de la règle donnée par Descartes au Livre III de sa „Géométrie" (p. 464—467 de l'édition d'Adam et Tannery) pour construire à l'aide d'un cercle et d'une parabole les racines des équations cubiques et biquadratiques; en s'appliquant toutefois à réduire autant que possible le nombre des lignes à tirer. A cet effet Huygens fait correspondre les points G et R de ses figures avec les points D et A de celle de Descartes. Ensuite il con-

tice R, latere recto aequali GA quae fit RO. Centro vero F radio FR circumferentia defcribatur parabolam fecans in O et ducatur OC parallela AB, donec Conchoidi occurrat in C. Eritque C punctum inflexionis quaefitum.

Eftque notatum dignum quod (fi) ad punctum C tangens (ducatur ZCL, illa fimul quoque fecabit conchoidem in puncto C). [6])

Haec eft Conftructio univerfalis. At quando AQ minor eft quam AG per trisectionem anguli femper abfolvi poteft. Item cum AQ major quidem eft quam AG fed qu. AQ non majus duplo qu.° AG. [7])

[Fig. 2.] [Fig. 3]

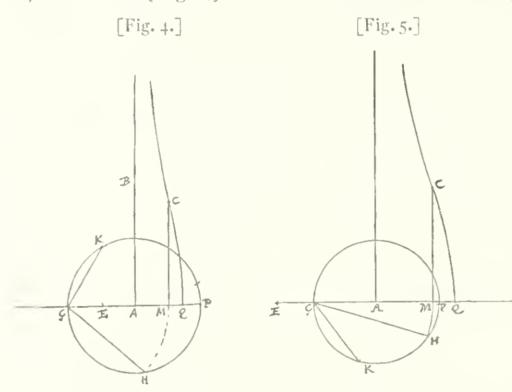


struit le point E, correspondant au point E de Descartes qui est, chez Descartes, le centre du cercle qui va couper la parabole ayant R pour sommet et pour paramètre l'unité $b = GA$; mais avant de tirer le cercle Huygens transporte son centre au point F situé symmétriquement à l'autre côté de l'axe RG. De cette façon la droite OM, qui détermine la racine GM de l'équation cubique, peut servir en même temps à découper sur la conchoïde le point d'inflexion cherché. Remarquons encore que Huygens ne semble pas avoir tâché d'interpréter la présence, dans le cas de la Fig. 3 d'un second et d'un troisième point d'intersection du cercle et de la parabole dont l'un est situé entre R et O et l'autre à gauche de la droite RG. Évidemment le second point d'intersection correspond aux points d'inflexion de la seconde branche de la conchoïde et le troisième à des points d'inflexion imaginaires.

[6]) Les mots entre parenthèses ont été biffés depuis et remplacés par „duci nequit", ce qui témoigne d'une autre conception de la notion de tangente.

[7]) Les constructions qui vont suivre sont des applications directes des règles données par Descartes au Livre III de sa Géométrie (p. 472—474 de l'édition d'Adam et Tannery) et ces règles mêmes conduisent à la distinction des deux cas.

Si igitur AQ minor fuerit quam AG haec erit Conſtructio quae ſequit. Centro A, radio AG (Fig. 4) circulus deſcribatur KPG. inque eo accommodetur GK aequalis duplae GE inventae ut prius, et rectae GH quae ſubtendit $\frac{1}{3}$ arcus KPG aequalis ſumatur GM, et ducatur MC parallela AB. Haec Conchoidem ſecabit in flexus puncto.



[Fig. 4.] [Fig. 5.]

Cum vero AQ major eſt quam AG, at qu. AQ non majus duplo quadrato AG, caeteris ad eundem modum compoſitis, haec tantum differentia erit, quod arcum KP in tres partes aequales ſecare oportet, quarum una ſit PH, et ſubtenſae GH aequalem ſumere GM.

(Poteſt autem haec angulorum triſectio fieri ope Conchoidis ipſius quae propoſita eſt, methodo Nicomedis quam videri eſt apud Pappum lib. 4 prop. 32. [8]) nam quod ille per Hijperbolem illic efficit, [9]) idem apparet et per Conchoidem fieri poſſe). [10])

---

[8]) Voir les pages 62 recto et verso de l'ouvrage cité dans la note 3, p. 259 de notre T. II. (Hultsch, T. I, p. 274—277). Il s'agit de la construction bien connue par laquelle on obtient la trisection de l'angle ABC en tirant la droite BDE de manière qu'on ait DE = 2 BA.

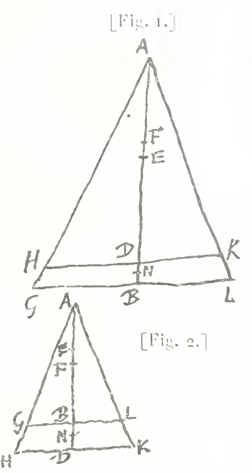
[9]) Dans la proposition précédente sur laquelle on peut consulter la note 9, p. 228 du T. XI.

[10]) Cette remarque, que nous avons mise entre parenthèses, a été biffée depuis. Elle se retrouve dans la lettre à van Schooten du 23 octobre 1653 (p. 246 du T. I); mais elle manque dans les „Illustrium quorundam problematum constructiones" de 1654. Dans l'intervalle Huygens doit donc s'être aperçu que le problème de la trisection d'un angle donné à l'aide d'une conchoïde, *donnée d'avance*, est d'une autre nature que celui d'obtenir cette trisection par une conchoïde dont le choix est adapté à l'angle donné. Le premier problème est exécutable, du moins sous de certaines conditions, comme cela ressort indirectement d'une pièce de 1659 que nous donnerons comme Appendice IV aux „Illustrium quorundam problematum constructiones" (voir la note 4 de cet Appendice) mais nous n'avons aucune preuve que Huygens s'est occupé de ce problème.

XXI.[1]

1653.

25 Nov. 1653.



[Fig. 1.]

[Fig. 2.]

Centra gravitatis invenire ſecundum methodum Fr. Schotenij quae pertinet ad plana vel ſolida ejus naturae, ut in ſegmento absciſſo ſectione baſi parallela, centrum grav. in eandem rationem dividat diametrum ſegmenti, atque in tota magnitudine diametrum totam.

Sit AB diam. trianguli GAL $\infty\, a$ et E ponatur c. gr. item N centr. gr. GHKL. Sitque AE $\infty\, x$; BD $\infty\, y$.

BA (a) ad DB (y) ut AE (x) ad EF $\left(\frac{xy}{a}\right)$ ergo F c. gr. triang. HAK.

ut ▱ GHKL $(2ay - {}^{2})\, yy)$ ad △ HAK $(aa - {}^{2})\, - 2ay + yy)$ ita EF $\left(\frac{xy}{a}\right)$ ad EN [3]) ∞ EB $(a - x)$

$2aay - 2axy \infty axy$; haec tantum ſcribere opus quia cetera delenda forent.

[1]) Dans la pièce qui suit et que nous avons empruntée aux pages 249—251 du manuscrit N°. 12, Huygens détermine le centre de gravité du triangle à l'aide d'une méthode qui lui fut communiquée par van Schooten et qui lui semble avoir frappé comme ingénieuse. Plus tard, en 1657, van Schooten publia cette méthode dans son „Exercitationum mathematicarum Liber V. Continens Sectiones triginta miscellaneas," p. 458—459 (voir l'ouvrage cité dans la note 3, p. 184 du T. I). Il l'y applique à la parabole en supposant connu déjà le centre de gravité du triangle.

Ajoutons que, dans sa lettre du 10 décembre 1653 à van Schooten (p. 254—256 du T. I.), Huygens revient sur la même méthode pour en donner une autre application.

[2]) Après coup Huygens remplaça ces minus par le signe ꭓ qu'il emploie pour indiquer qu'on doit choisir + ou — d'après les circonstances. En même temps il a ajouté la Fig. 2 qui se rapporte au cas où l'on prend le signe +.

D'ailleurs les expressions $2ay$ ꭓ yy et aa ꭓ $2ay + yy$ n'indiquent pas les aires des figures GHKL et HAK mais elles leur sont proportionelles.

[3]) Cette proportion se déduit du théorème d'Archimède qui sera cité plus bas.

$$2a - 2x \infty x$$
$$2a \infty 3x$$
$$\tfrac{2}{3}a \infty x \text{ AE ut oportebat.}$$

Ratio methodi [4]) eſt haec. Quoties enim E non eſt ipſum gravitatis centrum poſſibile eſt tam exiguum abscindere [Fig. 1) vel adjungere [Fig. 2] fruſtum GHKL, ut diviſa DA in F ſimiliter ac BA in E, faciendoque ut FE ad EN eandem habeat rationem quam fruſtum GHKL ad △ HAK, cadat N non inter D et B ubi debebat ſecundum 8.m Aequipond.m Archim. 2.di [5]) (fuiſſet enim ex conſtr. N centrum gr. GHKL) ſed extra eam, et quidem ab E ultra B, cum E à vertice A magis remotum erit quam verum grav. centrum: et tunc abſcindenda eſt portio GHKL [Fig. 1]. Sed ab E citra B cum propius vertici A ſumetur centrum E quam verum grav. centrum: et tunc adjungenda eſt portio GHKL [Fig. 2.].

Quin et ea ratione detrahi vel addi poteſt GHKL ut conſtructis ijs quae dictae ſunt, incidat N in B. quod cum fiet, inde demonſtratio facile deducetur quae deducat ad abſurdum. Nam cum N incidet in B nequaquam poterit eſſe centr. gr. HGKL.

Ut igitur demonſtratio habeatur, quaerendum eſt poſito E, quantum adjungendum vel auferendum ſit fruſtum GHKL, ut conſtructis quae ſupra cadat N in B. Idque eo qui ſequitur modo.

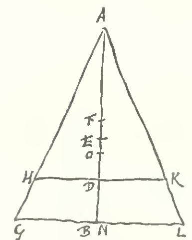
Sit AD ∞ q. quae quaeritur [Fig. 3.].

$$\text{Et erat BA} \infty a, \text{ AE} \infty x. \text{ Ergo } \frac{qx}{a} \infty \text{ AF}$$

$$\triangle\text{GAL } (aa) \text{ ad } \triangle \text{ HAK } (qq) \text{ ut NF} \infty \text{BF} \left(a - \frac{qx}{a}\right) \text{ ad}$$

[Fig. 3.]

$$\text{NE} \infty \text{BE } (a - x) \text{ per 8.2. Aeq.}$$ [5])



$$aa - qq \text{ ad } qq \text{ ut } x - \frac{qx}{a} \text{ ad } a - x.$$

$$aa - qq \text{ ad } qq \text{ ut } ax - qx \text{ ad } aa - ax$$

$$a + q \text{ ad } x \text{ ut } qq \text{ ad } aa - ax$$

$$aa + aq \text{ ad } ax \text{ ut } qq \text{ ad } aa - ax$$

$$aa + aq \text{ ad } qq \text{ ut } x \text{ ad } a - x$$

Si E centrum gr. dicatur trianguli GAL poſita licet AE majore primum quam

---

[4]) Au lieu cité dans la note 1, van Schooten a cru pouvoir se dispenser de démonstrations faites, comme celle qui va suivre, à la mode des anciens.

[5]) Consultez sur ce théorème la note 6, p. 295 du Tome XI.

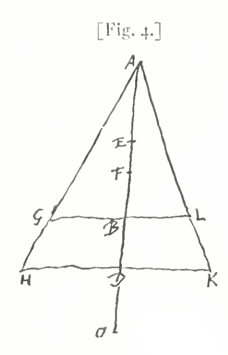
$\frac{2}{3}$ AB: Sit punctum D ita collocatum ut ſicut BE ad EA ita ſit qu. DA ad qu. AB + + □ BAD, (quod eſt ſecundum analyſin explicatam,) et ducatur HDK parall. GL. erit autem DA minor quam BA, quod ſic oſtenditur.

Sit duabus BA, AD tertia proportionalis AO, ſeu potius ſit AO quae cum AB comprehendat rectang. aequale qu° AD.

Eſt igitur □ BA, AO ad qu. AB + □ BA, AD hoc eſt AO ad utramque ſimul BA, AD, ut BE ad EA; ſed quia AE major ponitur quam $\frac{2}{3}$ BA erit ratio BE ad EA minor quam ſubdupla. Ergo et AO ad BA + AD minor quam ſubdupla: unde liquet quod AO eſt minor ex tribus proportionalibus BA, DA, OA. Ergo BA major quam DA.

Porro autem quoniam eſt qu. DA ad qu. BA + □ BAD ut BE ad EA, h. e. ut □ EBA ad □ EAB, et permutando erit qu. DA ad □ EBA ut qu. BA + □ BAD ad □ EAB, h. e. ut BA + AD ad EA. h. e. ut □ BAD + + q. AD ad □ EAD, quia verò ut q. BA + □ BAD ad □ EAB ita eſt □ BAD + q. AD ad □ EAD erit etiam ut q. BA + □ BAD ad □ EAB ita (aufer.° 3^{m} à primo et 4^{m} a 2do) qu. BA – q. AD ad □ EA, BD. Ergo quoque ut qu. DA ad □ EBA ita q. BA – q. DA ad □ EA, BD. h. e. ad □ BAE – – □ DAE. h. e. ad □ BAE – □ BAF, (namque eſt BA ad DA ut AE ad AF.) h. e. ad □ BA, EF et permut.° ut qu. DA ad q. BA – q. DA ita □ EBA ad □ BA, EF h. e. ita EB ad EF, et invert.° Verum ut q. BA – q. DA ad qu. DA ita eſt fruſtum GK ad triang. HAK; Ergo fruſtum GK ad triang. HAK ut FE ad EB. Eſt autem ſecundum ea quae poſita fuere E centrum grav. triang.^{i} GAL, et F centr. grav. triang. HAK, Ergo per 8.2^{i} Æqui. Archim. erit in B centr. gr. fruſti GK, quod fieri non poteſt.

[Fig. 4.]



Rurſus ſi AE minor dicatur quam $\frac{2}{3}$ AB, et E [Fig. 4] gr. centr. triang. GL, poſitâ DA ut prius, oſtendetur DA major quam BA. Et rurſus per ſimilem demonstr.^{m} erit in B centr. gr. fruſti GK, quod abſurdum.

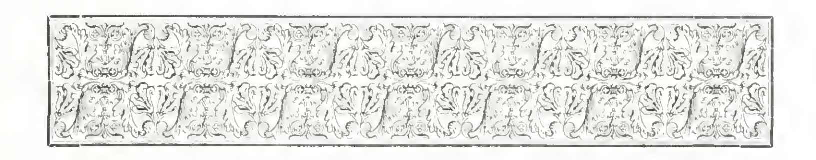
Non eſt igitur AE neque major neque minor quam $\frac{2}{3}$ AB, ſi E futurum eſt triang.^{i} GAL centr. gr. Ergo centrum grav. apparet ita dividere BA ut pars ad verticem ſit ſubſeſquialtera totius, ſive dupla reliquae ad baſin.

DE CIRCULI MAGNITUDINE INVENTA

ACCEDUNT

PROBLEMATUM QUORUNDAM ILLUSTRIUM CONSTRUCTIONES

1654.



Avertiſſement.

On ſait qu' Archimède réuſſit à enfermer le rapport de la circonférence du cercle à ſon diamètre entre les limites $3\frac{10}{71}$ et $3\frac{10}{70}$ en calculant les périmètres p_{96} et P_{96} des polygones inſcrit et circonſcrit de 96 côtés [1]). Pendant plus de dix huit ſiècles ſa méthode reſtait la ſeule connue. Sans ſe laiſſer rebuter par les calculs énormes qu'elle exigeait, Ludolf van Ceulen [2]) l'employa au commencement du dix-ſeptième ſiècle à déterminer le nombre π juſqu' au 36me chiffre [3]); réſultat qui ne fut ſurpaſſé qu' un ſiècle plus tard par A. Sharp [4]) au moyen d'un développement en ſérie.

---

[1]) Voir la „Dimensio circuli", p. 257—271 du T. I de l'édition de Heiberg, citée dans la note 2, p. 50 de notre T. XI.

[2]) Voir, sur Ludolf van Ceulen, la note 2, p. 275 du T. I.

[3]) Dans son ouvrage de 1596 „Van den circkel" (voir la note 2, p. 275, T. I) il trouve le nombre π jusqu' en 20 chiffres à l'aide des polygones inscrit et circonscrit de 15.2^{31} côtés. Il ajoute toutefois un 21me chiffre qu' il ne peut pas avoir calculé avec ces polygones. On rencontre le même nombre jusqu' en 33 chiffres à la page 163 de l'ouvrage posthume: „De Arithmetische en Geometrische fondamenten, van Mr. Ludolf van Ceulen, Met het ghebruyck van dien In veele verscheydene constighe questien, soo Geometrice door linien, als Arithmetice door irrationale ghetallen, oock door den regel Coss, ende de tafelen sinuum ghesolveert. Tot Leyden, By Joost van Colster, ende Jacob Marcus. Ann. CIƆ IƆ CXV." Enfin tous les 36 chiffres qu'il a calculés, furent incisés sur sa pierre sépulcrale, disparue depuis, qui se trouvait dans l'église de Saint-Pierre à Leyde. Il les calcula probablement à l'aide des polygones de 2^{62} côtés, puisque dans le „Cyclometricus" de Snellius (voir la note 6), où les 36 chiffres de van Ceulen sont mentionnés à la p. 55, on rencontre à la p. 54 le passage suivant: „Diligentissimus logista, Ludolphus noster, initio facto à latere quadrati eandem inscriptarum inventionem sexagies continuavit." Or, le nombre 36 des chiffres est en accord parfait avec l'emploi de ces polygones.

[4]) Voir l'ouvrage de Sherwin „Mathematical Tables, Contriv'd after a most comprehensive

C'était Willebrord Snellius [5]) qui, le premier, dans son „Cyclometricus" [6]), publié en 1621, sut resserrer les limites [7]), indiquées par Archimède, sans aug-

Method: Containing, Dr. Wallis's Account of Logarithms, Dr. Halley's and Mr. Sharp's Ways of constructing them; with Dr. Newton's contraction of Briggs's Logarithms, viz. A Table of Logarithms of the Numbers from 1 to 10100, with the means to find readily the Logarithm of any Number, and the Number of any Logarithm, to seven places of Figures: and Tables of natural and logarithmic Sines, Tangents, Secants, and Versed-sines, to every minute of the Quadrant: with the Explication and Use prefix'd. London: Printed for William Mount and Thomas Page, at the Postern on Tower Hill, M, DCC, V." Aux pages 56—59 le nombre π est donné jusqu' en 73 chiffres (dont le dernier est d'une unité trop petit) à l'aide du développement en série $\pi = 6 \text{ arc tg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \ldots\right)\sqrt{12}$.

[5]) Voir, sur Snellius, la note 8, p. 523 du T. I.

[6]) Willebrordi Snellii R. F. Cyclometricus, De circuli dimensione secundum Logistarum abacos, & ad Mechanicem accuratissima; atque omnium parabilissima. Eiusdemque usus in quarumlibet adscriptarum inventione longe elegantissimus, & quidem ex ratione diametri ad suam peripheriam data. Lugduni Batavorum, Ex Officinâ Elzeviriana, Anno CIↃ IↃ CXXI.

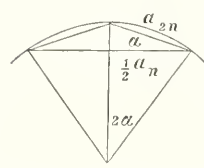
[7]) Pour comparer entre elles les approximations diverses de la circonférence du cercle on peut se servir avec avantage de la suite:

$$(1) \qquad 2\pi = p_{2n} + \frac{1}{3}(p_{2n} - p_n) + \frac{2}{15}\frac{(p_{2n} - p_n)^2}{p_{2n}} + \frac{2}{35}\frac{(p_{2n} - p_n)^3}{p_{2n}^2} + \frac{8}{315}\frac{(p_{2n} - p_n)^4}{p_{2n}^3} + \frac{8}{693}\frac{(p_{2n} - p_n)^5}{p_{2n}^4} + \ldots$$

où p_n désigne le périmètre du polygone régulier à n côtés, inscrit dans un cercle dont le rayon; est égal à l'unité.

On obtient cette suite en partant de la relation évidente:

$$\alpha = \frac{\pi}{2n} = \text{arc cos}\frac{a_n}{2a_{2n}} = \text{arc cos}\frac{p_n}{p_{2n}} = \text{arc sin}\frac{\sqrt{p_{2n}^2 - p_n^2}}{p_{2n}}$$



où α représente la moitié de l'arc soustendu par le côté a_{2n} du polygone inscrit à $2n$ côtés. Ensuite on n'a qu'à développer l'*arc sin* par la série bien connue, à remplacer n par sa valeur, qui se déduit de la formule $p_{2n} = 4n \sin \alpha = 4n\sqrt{p_{2n}^2 - p_n^2} : p_{2n}$, et les facteurs $p_{2n} + p_n$ par $2p_{2n} - (p_{2n} - p_n)$.

Au cas où les approximations en question ont été exprimées à l'aide des périmètres P des polygones circonscrits ou des aires s et S des polygones inscrits ou circonscrits, nous les réduisons préalablement par les formules $P_{2n} = p_{2n}^2 : p_n, s_{2n} = \frac{1}{2}p_n, S_n = \frac{1}{2}P_n$; dont la première est identique avec le „Theor. X, Prop. XIII" de Huygens (p. 149 du Tome présent) et équivalente à la relation $s_{2n}^2 = s_n S_n$, déduite par Snellius dans la Prop. IX, p. 14 de l'ouvrage cité dans la note précédente.

De cette manière les limites Archimédiennes s'écrivent:

$$p_{2n} < 2\pi < p_{2n} + (p_{2n} - p_n) + \left[\frac{(p_{2n} - p_n)^2}{p_n}\right] = P_{2n}.$$

Ajoutons qu'on peut évaluer les différences avec la formule exacte à l'aide des relations approchées $p_{2n} - p_n = \pi^3 : 4n^2 = 7{,}75 : n^2$ et $(p_{2n} - p_n) : p_{2n} = 1{,}234 : n^2$.

menter le nombre des côtés des polygones employés; mais les deux théorèmes [8]) qu' il donne à ce propos, quoique vrais, n'avaient pas été prouvés rigoureusement par lui, comme Huygens l'a remarqué et que nous le montrerons à propos des démonstrations rigoureuses par lesquelles Huygens a remplacé les raisonnements de Snellius [9]).

[8]) Voici les limites indiquées dans les Prop. XXVIII (p. 42, limite inférieure) et XXIX (p. 43—44, limite supérieure) de l'ouvrage de Snellius :

$$\frac{3p_{2n}^2}{2p_{2n}+p_n} < 2\pi < \tfrac{1}{3}(p_n + 2p_{2n}) = \frac{p_{2n}(p_{2n}+2p_n)}{3p_n},$$

c'est-à-dire (comparez les notes 30 et 33, pp. 156 et 159):

$$p_{2n} + \tfrac{1}{3}(p_{2n}-p_n) + \tfrac{1}{9}\frac{(p_{2n}-p_n)^2}{p_{2n}} + \left[\frac{(p_{2n}-p_n)^3}{9p_{2n}(2p_{2n}+p_n)}\right] < 2\pi < p_{2n} +$$
$$+ \tfrac{1}{3}(p_{2n}-p_n) + \tfrac{1}{3}\frac{(p_{2n}-p_n)^2}{p_{2n}} + \left[\frac{(p_{2n}-p_n)^3}{3p_n\, p_{2n}}\right].$$

Par la comparaison avec la suite (1) de la note 7, on trouve donc pour la différence de la valeur exacte de 2π d'avec la limite inférieure à peu près $\frac{1}{45}(p_{2n}-p_n)^2 : p_{2n}$ et pour celle d'avec la limite supérieure à peu près neuf fois cette valeur.

Une rectification de l'arc de cercle, exposée par le Cardinal de Cuse (1401—1464) dans son ouvrage „De mathematica perfectione" coïncide avec la limite inférieure de Snellius, comme on le voit aisément en comparant la note 33, p. 159 du Tome présent, avec la proposition suivante, qu'on trouve à la p. 106 recto de l'édition des Œuvres de de Cuse de 1514 par J. Faber Stapulensis: „Illa est habitudo trium semidiametrorum ad tres semidiametros minus sagittae cordae quadrantis & minoris: quae est cuiuslibet arcus ad suam chordam." C'est en appliquant cette proposition à l'angle de 60° que de Cuse a obtenu la valeur $\pi = 18 : (4+\sqrt{3}) = 3{,}140237\ldots$ qu'il donne (p. 107 recto) comme exacte. De plus, dans les commentaires d'Omnisanctus, qui accompagnent dans l'édition citée le texte de de Cuse, on retrouve p. 111 recto la construction même de Snellius décrite au „Theorema XIII", p. 159 du Tome présent.

Une autre approximation remarquable, mais bien inférieure à celles de Snellius, fut indiquée par Lansbergen dans ses „Cyclometriae novae libri duo, Middelburgi, 1616." Elle revient à poser:

$$2\pi = p_{2n} + \frac{p_{2n}-4}{p_n}(p_{2n}-p_n),$$

c'est-à-dire, pour un polygone d'un grand nombre de côtés à peu près $2\pi = p_{2n} + 0{,}3634\ldots(p_{2n}-p_n)$. Elle est donc presque onze fois plus approchée que celle $2\pi > p_{2n}$ d'Archimède.

Van Lansbergen l'employa à calculer 30 chiffres du nombre π à l'aide du polygone de 2^{46} côtés (p. 34); mais ce résultat était flatté quant aux deux derniers chiffres; comme on peut s'en assurer en se servant des relations approchées de la note 7. Appliquée à un polygone donné, sa méthode ne permet en général de pousser l'approximation qu'un seul chiffre plus loin que la méthode Archimédienne; tandis que celle de Snellius double, au moins, le nombre des chiffres connus et lui permit ainsi de vérifier 35 des 36 chiffres de Ludolf van Ceulen à l'aide des polygones de 2^{29} et 2^{30} côtés. Mais nous nous réservons de revenir sur cette question du nombre des chiffres plus loin dans la note 15, p. 142 du Tome présent.

D'ailleurs ces approximations de de Cuse et de van Lansbergen ne permettent pas d'enfermer le rapport cherché dans des limites bien définies comme Snellius l'a fait.

[9]) Voir les notes 32 et 33 p. 158 et 159 du Tome présent.

Telle était la ſituation lorſque, en janvier ou février 1654, Huygens commença à s'occuper de la meſure du cercle [10]). En très peu de temps il arriva à des réſultats qui lui donnaient beaucoup de ſatisfaction [11]). Au commencement de mars il en communiqua quelques uns à van Schooten et à Lipſtorp [12]); d'où il paraît que déjà alors Huygens était en poſſeſſion des deux derniers théorèmes [13]) que, dans ſon ouvrage, il a déduits des propriétés du centre de gravité et qui, puiſque leur approximation eſt d'un ordre plus élevé, permettent de tripler au lieu de doubler, comme le font les théorèmes de Snellius, le nombre des chiffres, déduiſibles de deux polygones donnés de n et de $2n$ côtés, c'eſt-à-dire, en comparant ce nombre à celui fourni par la méthode Archimédienne. Il nous ſemble même qu'il y a là une indication que l'idée première, qui a amené toutes ces recherches de cyclométrie, était qu'on pourrait obtenir une meſure plus rapprochée du cercle en utiliſant les propriétés du centre de gravité, deſquelles Huygens s'était déjà occupé dans ſes „Theoremata de quadratura hyperboles, ellipſis et circuli" [14]). En outre, on trouve indiquée dans les lettres mentionnées à Lipſtorp

---

[10]) Voir la Lettre N°. 176, p. 268 du T. I.

[11]) Voir la Lettre N°. 176, déjà citée: „Ego sane eidem rei à paucis diebus intentus sum, atque ea quae inveni Theoremata placent mihi prae omnibus aliis quae scripsi hactenus." Et comparez encore les pp. 277, 281 et 288 du T. I.

[12]) Voir les Lettres N°. 181 et N°. 183, pp. 274—277 du T. I.

[13]) Voir, pour le premier les dernières lignes du „Theor. XVI. Propos. XIX", p. 171 du Tome présent, et pour le second les lignes cursivées, p. 175 de ce même Tome. Ces théorèmes conduisent aux inégalités suivantes (comparez les notes 47 et 52, pp. 168 et 175):

$$p_{2n} + \tfrac{1}{3}(p_{2n} - p_n) + \tfrac{2}{15}\frac{(p_{2n} - p_n)^2}{p_{2n}} + \tfrac{2}{25}\frac{(p_{2n} - p_n)^3}{p_{2n}^2} + \left[\tfrac{6}{25}\,\frac{(p_{2n} - p_n)^4}{p_{2n}^2\,(2p_{2n} + 3p_n)}\right] > 2\pi,$$

$$p_{2n} + \tfrac{1}{3}(p_{2n} - p_n) + \tfrac{2}{15}\frac{(p_{2n} - p_n)^2}{p_{2n}} + \tfrac{22}{675}\frac{(p_{2n} - p_n)^3}{p_{2n}^2} - \left[\tfrac{2}{675}\,\frac{(2014p_{2n} - 979p_n)(p_{2n} - p_n)^4}{(44p_{2n}^2 + 92\,p_n\,p_{2n} + 89p_n^2)\,p_{2n}^2}\right] < 2\pi,$$

dont les *trois* premiers termes coïncident avec ceux de la suite (1) de la note 7, tandis que chez les limites de Snellius de la note 8 la coïncidence cesse dès le second terme.

Et que ces théorèmes étaient connus de Huygens lorsqu'il écrivit les lettres en question, cela s'ensuit des résultats numériques qu'il assure avoir obtenu à l'aide des polygones de 30 et de 60 côtés. A l'exception du nombre 31415926537, où il faut remplacer le 7 par un 8, ces résultats sont identiques avec ceux du „Problema IV. Propos. XX" (p. 179 du Tome présent) et n'auraient pu être calculés sans l'emploi des théorèmes mentionnés.

[14]) Voir l'ouvrage de 1651, reproduit aux p. 288—313 du Tome XI, et consultez encore la

et à van Schooten la conſtruction approchée de la circonférence du cercle, laquelle conſtitue le premier „Aliter” du „Problema II. Prop. XI” [15]).

Un peu plus tard il a trouvé le théorème que la circonférence du cercle eſt moins que la moindre des deux proportionnelles entre les périmètres des polygones inſcrit et circonſcrit du même nombre de côtés à laquelle Oronce Fine avait prétendu qu'elle était égale dans le cas du carré [16]). Il préfère ce théorème à tous les autres [17]), probablement à cause de ſa ſimplicité et de la difficulté qu' il a eue à le trouver, bien que ce théorème ſe prête bien moins que les autres au calcul et que l'approximation qu'il fournit eſt d'un ordre inférieur à celui des théorèmes plus compliqués dont nous avons parlé [18]). Il le mentionne à Kinner a Löwenthurn dans une lettre du 23 mars 1654 [19]) en le cachant sous l'énigme „Minor minore incognita," qu' il lui prie de vouloir communiquer à Marcus Marci, pour ſavoir, ſi celui-ci, qui était en train de préparer un ouvrage de Cyclométrie [19]), avait trouvé le même théorème [20]).

Vers la fin de mars le manuscrit eſt achevé et remis à van Schooten pour en avoir ſon avis. Mais voilà que Huygens commence à douter ſi ce qu' il appelle la ſeconde partie de ſon ouvrage, c'eſt-à-dire celle qui débute par le „Theor. XIV. Propos. XVII" et contient la conſidération des centres de gravité, devrait bien être publiée. L'uſage qu'il y a fait de la conſtruction d'une parabole dans la démonſtration du Théorème XIV lui déplaît, cependant il ne pourrait éviter

---

Lettre à van Schooten du 1 avril 1654 (p. 279 du T. I), où la connection qui existe entre ces deux derniers théorèmes et les „Theoremata” est mentionnée expressément.

[15]) Voir la p. 145 du Tome présent.

[16]) Voir le premier alinéa de la p. 157 du Tome présent.

[17]) Voir la „Praefatio” à la p. 115 du Tome présent et consulter au Tome I les lettres à Kinner à Löwenthurn (pp. 279 et 290), à Grégoire de Saint-Vincent p. 281 et à Golius p. 289.

[18]) On a d'après le théorème en question, qu'on trouve p. 151 du Tome présent: $2\pi < \sqrt[3]{p^2_{2n} P_{2n}}$; c'est-à-dire, en appliquant une des formules de la note 7:

$$2\pi < p_{2n}^{\frac{4}{3}} p_n^{-\frac{1}{3}} = p_{2n}\left(1 - \frac{p_{2n} - p_n}{p_{2n}}\right)^{-\frac{1}{3}} = p_{2n} + \frac{1}{3}(p_{2n} - p_n) + \frac{2}{9}\left(\frac{p_{2n} - p_n}{p_{2n}}\right)^2 + \ldots$$

C'est donc le troisième terme qui diffère de celui de la suite de la note 7 et l'approximation est de l'ordre de celles de Snellius.

[19]) Voir la p. 279 du T. I. Huygens avait été averti des intentions de Marci par le même Kinner dans ses lettres du 29 novembre 1653 (p. 252 du T. I) et du 28 février 1654 (p. 269 du T. I); d'après cette dernière lettre l'ouvrage serait publié vers Pâques de l'année 1654. Il parut en effet dans cette année 1654 sous le titre: „Labyrinthus in quo via ad circuli quadraturam pluribus modis exhibetur. Pragae, 1654."

[20]) Voir la réponse de Kinner à la page 284 du T. I. Marcus Marci n'a pas pu pénétrer le mystère, ce qui n'est guère étonnant vu qu'il n'avait pas trouvé le théorème.

de le répéter s'il voulait donner la démonſtration du Théorème curſivé de la „Prop. XX." Il incline à ſupprimer toute cette partie, ſauf à mentionner dans la préface les „Prop XIX et XX" [21]) pour s'en réſerver la priorité.

Cette ſeconde partie eſt en effet moins élégante et moins excluſivement géométrique que la première; mais de l'autre côté les théorèmes auxquels Huygens y eſt arrivé par la conſidération des centres de gravité conſtituent un progrès bien plus marqué dans la meſure approchée du cercle, que ne le font ceux de la première partie leſquels mènent à des approximations du même ordre [22]) que celles qu'on obtient par les théorèmes de Snellius, qui, il eſt vrai, ne ſavait pas les démontrer. D'ailleurs ni les théorèmes de Snellius, ni ceux de Huygens, n'ont jamais ſervi à déterminer de nouveaux chiffres, inconnus juſqu' alors, du rapport de la circonférence au diamètre. Cela était réservé à des calculateurs plus infatigables que Huygens ou Snellius, à l'aide de procédés plus modernes. Toutefois on ne regrettera pas que Huygens, ſuivant en cela le conſeil de van Schooten, a renoncé à ſon deſſein d'omettre cette ſeconde partie.

Dans la même lettre, très importante, du 1er avril 1654 [23]) on trouve mentionnée pour la première fois l'intention de Huygens, à laquelle il a donné ſuite, de joindre à ſon traité de cyclométrie les „Illuſtrium quorundam problematum conſtructiones."

Deux fois encore, Huygens, qui était dans la crainte d'être devancé par Marci, a dû rappeler à van Schooten, qu'il attendait ſon avis. Enfin, le 19 avril [24]), celui-ci renvoya les manuſcrits avec ſes excuſes, beaucoup de louanges, des annotations que nous ne connaiſſons pas, et le conseil, déjà mentionné, de n'en pas ſupprimer la ſeconde partie, dont les démonſtrations lui ſemblaient ſuffiſamment élégantes.

[21]) Voir les pages 169—175 du Tome présent et consulter sur les deux théorèmes en question la note 13.

[22]) En outre de la limite supérieure de Snellius (voir la note 8), qui résulte du „Theor. IX", p. 137, et de celle déjà mentionnée dans la note 18, on rencontre encore dans la première partie les deux limites suivantes, qui, traitées de la manière décrite dans la note 7, s'écrivent:

$$p_{2n} + \tfrac{1}{3}(p_{2n} - p_n) < 2\pi \text{ („Theor. V et Theor. VII", pp. 129 et 133)},$$

$$\tfrac{1}{3}(2P_{2n} + p_{2n}) = p_{2n} + \tfrac{1}{3}(p_{2n} - p_n) + \tfrac{2}{3}\frac{(p_{2n} - p_n)^2}{p_{2n}} + \left[\tfrac{2}{3}\frac{(p_{2n} - p_n)^3}{p_n\, p_{2n}}\right] >$$
$$> 2\pi \text{ (Theor. VI, p. 131)}.$$

L'écart de la suite de la note 7 y commence avec le troisième terme.

[23]) Voir les p. 279—280 du T. I.

[24]) Voir les p. 285—286 du Tome I, et consulter sur les rappels du 9 et du 17 avril 1654 les pp. 282 et 285 du même Tome.

Enfin le 1er juillet 1654 Huygens put expédier à van Schooten et à quelques autres ſavants [25]) les premiers exemplaires du livre imprimé.

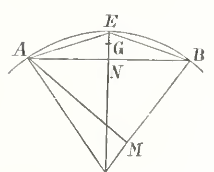
Plus tard Huygens eſt revenu à deux repriſes au ſujet de la meſure approchée du cercle. La première fois, en 1659, à l'occaſion de ſes recherches ſur la cycloïde. Ayant découvert que le centre de gravité d'un arc cycloïdal, symmétrique par rapport à l'axe, ſe trouve à deux tiers de la flèche, comptée depuis la corde, l'idée lui vient que par la comparaiſon de la ſituation de ce centre de gravité avec celle du centre de gravité d'un arc de cercle, il pourra arriver à une limite pour la meſure du cercle, de même que, précédemment, dans l'ouvrage que nous traitons, il avait atteint le même but en comparant la ſituation des centres de gravité d'un ſegment de cercle et d'un ſegment parabolique [26]). Et, en effet, il trouve de cette manière une limite inférieure identique, au fond, avec celle de Snellius [27]).

---

[25]) Voici la liste des personnes auxquelles Huygens fit parvenir un exemplaire: Golius (voir T. I, p. 287, note 4 et p. 289), Van Schooten (T. I, p. 287), le Ducq (p. 287, note 4), Kraen (même note), van der Wal, P. de Chanut, C. de Briene, F. Blondel, Stevin, la bibliothèque (de Leiden?) (toujours la même note), Kinner a Löwenthurn (même note et p. 288, note 3, p. 290 et p. 315, T. I), Grégoire de Saint-Vincent (même note, p. 288 et 290—291, T. I), de Sarasa (même note et p. 288, T. I), Tacquet et van Gutschoven (même note et p. 290, note 4), de Bie (p. 290, note 4); ensuite à J. J. Stöckar, 13 octobre 1654, (T. I, p. 298), la Princesse Palatine Élisabeth, décembre 1654, (T. I, p. 316—317), A. Colvius, mars 1655, (T. I, p. 322), Mylon, février 1656, (T. I, p. 376), De Carcavy et de Fermat, septembre 1656 (T. I, p. 494), Moray et Hobbes, 20 décembre 1662 (T. IV, p. 280), Pr. de Montbéliard, 15 janvier 1670 (d'après une annotation p. 254 du livre D des „Adversaria"). De quelques endroits de la „Correspondance" on doit conclure qu'on ne pouvait trouver l'ouvrage chez les libraires à Paris (T. I, p. 400, T. VI, p. 235), ni à Londres (T. VI, p. 373).

[26]) Comparez le dernier alinéa de la p. 97 du Tome présent.

[27]) Le calcul en question s'appuie sur ce que le centre de gravité G d'un arc de cercle AEB doit être plus près de la corde AB que le centre de gravité d'un arc cycloïdal symmétrique ayant la même flèche NE; ce qui est d'ailleurs une conséquence presqu'évidente du fait que la courbure de l'arc cycloïdal augmente régulièrement avec la distance du sommet. On a donc $GN < \frac{2}{3} NE$.



Posant ensuite $DE = r$, $AB = a_{2n}$, $AM = \frac{1}{2} a_n$, $NE = p$, on a $DG = \frac{a_{2n}}{\text{arc AEB}} r < (r - \frac{1}{3} p)$; donc: arc AEB $= \frac{2\pi r}{2n} > \frac{3r}{3r - p} a_{2n}$.

Mais de la proportion DN : DB = AM : AB, c'est-à-dire:

Une ſeconde fois, en 1668, il eſt ramené au même ſujet par ſa polémique avec Gregory, au cours de laquelle il trouve, entre autres, une nouvelle approximation ſemblable à celles de la note 13 et une conſtruction approchée pour la meſure d'un arc de cercle [28]), laquelle il a déduite de la ſeconde partie du „Theor. XVI. Prop. XIX". Mais nous traiterons ces nouvelles recherches avec plus de détail à leur propre place.

Si, pour l'ouvrage „De circuli magnitudine inventa", aucun manuſcrit contenant des travaux préliminaires ne nous eſt connu, il en eſt tout autrement pour les „Illuſtrium quorundam problematum conſtructiones." En effet, lorſque le premier avril 1654, Huygens communiqua, comme nous l'avons vu, à van Schooten ſon intention de joindre au premier ouvrage les ſolutions de quelques problèmes qui n'avaient ceſſé d'occuper les géomètres anciens et modernes, il était déjà en poſſeſſion de pluſieurs de ces ſolutions, qu' il avait miſes par écrit dans le manuſcrit [29]) qui nous a fourni le texte des „Travaux mathématiques divers de 1652 et 1653" [30]). Il n'avait qu' à choiſir et à perfectionner ceux qu'il voulait admettre dans la publication projetée, ce qui, à ſon avis, ne manquerait pas d'augmenter le nombre des mathématiciens qui déſireraient la poſſéder [31]). Et ſi, dans cette publication, il ne donne des problèmes que les conſtructions avec des démonſtrations rédigées à la mode des anciens, ſans ajouter les analyſes qui y ont conduit, le même manuſcrit ſupplée en grande partie à cette lacune et ne laiſſe aucun doute ſur les méthodes ſuivies.

$$(r - p) : r = \tfrac{1}{2}\, a_n : a_{2n},$$

on déduit successivement :

$$r - p = \frac{a_n\, r}{2a_{2n}};\; 3r - p = \frac{(4a_{2n} + a_n)\, r}{2a_{2n}}.$$

On trouve donc, en posant $r = 1$:

$$2\pi > \frac{12n\, a^2_{2n}}{4a_{2n} + a_n} = \frac{6a_{2n}\, p_{2n}}{4a_{2n} + a_n} = \frac{3p^2_{2n}}{2p_{2n} + p_n},$$

conforme à la limite inférieure de la note 8.

[28]) Voir la note 51 au dernier alinéa de la p. 174 du Tome présent et la page 275 du T. VI.

[29]) Le manuscrit N°. 12, mentionné dans la note 1, T. XI, p. 7.

[30]) Voir les p. 1—89 du Tome présent.

[31]) Voir la p. 280 du T. I.

En effet, ces méthodes de traiter les problèmes folides, c'eft-à-dire ceux qui mènent à des équations cubiques ou biquadratiques, ont déjà été difcutées dans l'„Avertiffement" des „Travaux mathématiques divers de 1652 et 1653" [32]). Il y en a deux; en voici la *première* qui a fervi pour les problèmes I et VIII des „Illuftrium quorundam problematum conftructiones":

Après avoir obtenu, par l'analyse, l'équation cubique qui réfoud le problème, Huygens en fait disparaître le fecond terme, fuivant en cela la règle donnée par Defcartes dans fa „Géométrie"; enfuite il applique à l'équation réduite la folution par la trifection de l'angle, ou, fi elle fait défaut, celle qui emploie les interfections de la parabole et du cercle, folutions qu'on trouve expofées toutes les deux dans ce même ouvrage de Defcartes; enfin Huygens cherche à fimplifier la conftruction obtenue de manière à économifer autant que poffible fur les lignes à tirer [33]).

La *feconde* plus spéciale qui a conduit aux conftructions des problèmes III—VII eft plus originale [34]). Huygens fe pofe un problème très général exigeant par exemple l'égalité de deux fegments dont l'un fe trouve fur une droite mobile. La folution de ce problème amène une équation biquadratique. Alors Huygens fpécialife les données du problème de manière à fimplifier systématiquement l'équation obtenue jufqu' à ce qu'elle fe réduit à une équation quadratique, comme dans les problèmes IV—VII, ou à une équation cubique binomiale, comme dans le cas des trois folutions du problème III. Dans ce dernier cas Huygens eft en poffeffion d'une folution du problème des deux moyennes proportionnelles, pourvu qu'on confidère accomplie l'égalifation des deux fegments. Comme nous l'avons montré dans l'„Avertiffement" que nous venons de mentionner, cette feconde méthode fut infpirée à Huygens à l'occafion de fes recherches fur l'origine poffible de la folution de Nicomède de ce même problème.

Voici d'ailleurs, pour chacun des problèmes des „Illuftrium quorundam problematum conftructiones" en particulier, l'hiftorique des recherches de Huygens.

[32]) Voir les p. 3—8 du Tome présent.
[33]) Comparez le second alinéa de la p. 4, et pour le „Probl. VIII" les p. 83—86 du Tome présent.
[34]) Comparez les p. 4—6 du Tome présent à commencer par le troisième alinéa de la p. 4.

Probl. I [35]).

Couper une ſphère donnée par un plan de manière que les ſegments ſoient entre eux dans un rapport donné.

C'eſt le premier des problèmes ſolides entamés par Huygens. L'antiquité en avait légué trois ſolutions complètes rapportées par Eutocius [36]); l'une due problablement à Archimède, les autres à Dionysidore et à Dioclès. Elles s'accompliſſent à l'aide des interſections d'une hyperbole avec une parabole ou avec une ellipſe. Archimède dans ſon ouvrage „De ſphaera et cylindro" avait traité le problème mais ſans en achever la ſolution [37]).

Le 13 janvier 1652 Huygens en élabore une ſolution nouvelle par la première des méthodes que nous venons d'eſquiſſer [38]). Il y emploie les interſections d'une parabole et d'un cercle, conſidérant une telle conſtruction plus ſimple que celles où l'on fait uſage d'autres coniques; mais il préfère à toutes les autres les conſtructions par la triſection de l'angle. Il en trouve une de cette façon au 31 janvier 1652 [39]) et la ſimplifie encore à deux repriſes [40]).

Probl. II [41]).

Trouver un cube double d'un cube donné.

Le problème eſt un cas particulier du „Probl. III". Des rédactions antérieures des deux ſolutions dont l'une eſt rigoureuſe et l'autre approximative, ſe trouvent aux p. 45—48 du Tome préſent, ſous les dates du 1er et du 2 mars 1652. Les raiſonnements qui ont conduit à ſes ſolutions nous ſont inconnus. La ſolution rigoureuſe a paſſé ſans modification importante dans le texte de l'ouvrage préſent; mais la démonſtration de la ſolution approximative a été notablement abrégée.

---

35) Voir les p. 183—189 du Tome présent.
36) Voir les notes 15 et 17, p. 12 du Tome présent.
37) Voir la note 16, p. 12 du Tome présent.
38) Voir la p. 101, qui précède.
39) Voir les p. 16—18 du Tome présent.
40) Voir les notes 3 et 4, p. 16 et la note 6, p. 184 du Tome présent.
41) Voir les p. 189—191 du Tome présent.

Probl. III [42]).

Trouver deux moyennes proportionnelles à deux droites données.

De ce problème célèbre l'antiquité connaissait plusieurs solutions, recueillies par Eutocius dans ses „Commentaires" sur le deuxième livre de l'ouvrage „De sphaera et cylindro" d'Archimède [43]). Descartes y avait ajouté une nouvelle à l'aide du cercle et de la parabole [44]).

Parmi elles celle de Nicomède avait grandement intrigué Huygens et l'avait conduit, comme nous l'avons dit, à la seconde de ses méthodes de résolution des problèmes solides.

L'ayant inventée le 30 janvier 1652, il ne tarde pas à appliquer cette méthode au même problème général, qui avait amené la construction de Nicomède, pour obtenir, cette fois, de nouvelles solutions des „Probl. IV—VII" [45]), qui sont des cas particuliers de ce problème. Ensuite il se met à chercher à son aide de nouvelles solutions, analogues à celle de Nicomède, du problème des deux moyennes. Les pièces N°. XI et XII [46]) des „Travaux mathématiques divers de 1652 et 1653" nous font connaître les résultats de ces recherches. Des solutions obtenues celle de la pièce N°. XI, trouvée le 9 mars 1652 et remaniée le 10 mars 1652, donnait naissance à la première construction [47]) qu'on trouve dans l'ouvrage présent. Un nouveau remaniement conduisit le 5 juin à la seconde construction [48]) et on reconnaît la troisième [49]) dans celle, datée du 16 mars, de la pièce N°. XII [50]) des „Travaux" mentionnés.

Après la publication des „Illustrium quorundam problematum constructiones" le problème n'a pas cessé d'intéresser Huygens. Il y est revenu à plusieurs reprises.

---

[42]) Voir les p. 191—197 du Tome présent.

[43]) Voir les p. 14—27 de l'édition de Bâle, citée p. 137 du T. I, note 1, ou les p. 66—127 du T. III de l'édition de Heiberg, citée p. 50 du T. XI, note 2.

[44]) Dans sa „Géométrie", voir les p. 469—470 du T. VI des „Œuvres de Descartes" publiées par Charles Adam et Paul Tannery.

[45]) Voir les p. 199—211 du Tome présent et consulter les pièces VI et VII, p. 26—37 de ce même Tome.

[46]) Voir les p. 49—56 du Tome présent.

[47]) Voir les p. 191—195 du Tome présent.

[48]) Voir la p. 195 et comparer la dernière partie de la pièce N°. XI des „Travaux", p. 52—53.

[49]) Voir la p. 197.

[50]) Voir les p. 54—56.

La première fois en 1657 à l'occasion de sa correspondance avec de Sluse. Le 11 juillet de cette année, dans sa première lettre à Huygens [51]), de Sluse lui envoya du problème en question deux solutions, que nous ne connaissons pas. D'après la réponse de Huygens [52]) l'une d'elles lui était entièrement nouvelle; l'autre avait beaucoup de rapport avec la dernière de celles qu'il avait publiées. Ensuite dans sa lettre du 31 juillet [53]) de Sluse assura Huygens qu'il savait résoudre le problème des deux moyennes d'un nombre indéfini de modes divers. Alors Huygens lui demanda [54]) s'il savait accomplir la construction à l'aide des intersections d'un cercle et d'une ellipse ou par la trisection d'un angle; lui même, il se rappelait d'avoir cherché vainement une telle construction. Aussitôt de Sluse répondit [55]) qu'il le savait et de plusieurs manières. Cela décida Huygens à se remettre à l'ouvrage.

Le 3 septembre il pouvait annoncer qu'il avait trouvé une solution de cette manière; mais elle lui semblait trop compliquée [56]). Enfin le 8 septembre il trouvait mieux. Il élabora cette nouvelle solution dans une pièce que nous reproduisons comme „Appendice I" [57]) aux „Illustrium quorundam problematum constructiones". Le 28 septembre il la mentionna à van Schooten [58]) et la communiqua à de Sluse dans sa lettre du 12 octobre 1657 [59]). Celui-ci lui répondit [60]) qu'il en possédait une autre plus concise et aussi universelle qu'il envoya à Huygens le 7 juin 1658 [61]). On la retrouve dans son „Mesolabum" comme „Propositio quarta" [62]).

Cependant Huygens avait découvert une nouvelle méthode pour résoudre les problèmes solides. Il l'applique au problème des deux moyennes dans une pièce que nous donnons comme „Appendice II" [63]). Il y retrouve les constructions de Ménechme, rapportées par Eutocius" [64]).

---

[51]) Voir la p. 36 du T. II.
[52]) Voir les p. 37—38 du T. II.
[53]) Voir la p. 43 du T. II.
[54]) Dans sa lettre du 13 août 1657; voir la p. 45 du T. II.
[55]) Voir sa lettre du 14 août 1657 (V. S.?), p. 47 du T. II.
[56]) Voir la p. 51 du T. II.
[57]) Voir les p. 217—221 du Tome présent.
[58]) Voir la p. 58 du T. II.
[59]) Voir les p. 66 et 67 du T. II.
[60]) Dans sa lettre du 19 octobre; voir la p. 71 du T. II.
[61]) Voir la p. 182 du T. II.
[62]) Voir les pages 14—16 de la seconde édition, citée p. 478 du T. II.
[63]) Voir les p. 222—224 du Tome présent.
[64]) Voir au lieu cité dans la note 43 les p. 20—21 de l'édition de Bâle; Heiberg, T. III, p. 92—99.

Ce fut en juillet 1659 que Huygens reçut enfin un exemplaire du „Mesolabum" [65]), si longtemps attendu. Il y trouvait plusieurs solutions du problème des deux moyennes proportionnelles et de quelques autres problèmes solides, avec leurs démonstrations à la mode des anciens; mais sans l'analyse qui les avait amenées et que de Sluse se réservait de publier plus tard, ce qu' il fit en 1668 à l'occasion de la seconde édition du „Mesolabum" dans la „Pars altera de analysi".

Huygens était beaucoup intrigué par ses solutions, puisqu' il reconnut qu'il ne pouvait pas les déduire à l'aide des méthodes qu'il possédait. Il se mit donc à la recherche de nouveaux artifices par lesquels il réussit en effet à retrouver quelques unes des plus belles constructions de de Sluse. C'est là l'origine de la pièce, que nous publions comme „Appendice III" [66]).

En 1664, le même sujet revient pour un moment [67]) dans la correspondance avec de Sluse, sans provoquer, du côté de Huygens, de nouveaux efforts. Il en est de même en 1668 lors de la publication de la seconde édition du „Mesolabum", où la méthode de de Sluse fut révélée et se montrait être très différente de celles

---

65) Cette première édition, citée p. 311, note 3, T. II, est extrêmement rare. Le Paige, l'éditeur de la Correspondance de de Sluse, n'en connaissait que deux exemplaires dont l'un se trouvait dans une bibliothèque particulière et l'autre dans la Bibliothèque nationale de Paris. Par la bienveillance de l'un des bibliothécaires de cette dernière, M. M. Vienne, nous sommes en état de fournir les renseignements suivants sur cette édition. Le texte en est identique avec les 43 premières pages de la seconde édition en excluant le dernier alinéa „Ostensum est", etc. Elle contient donc le „Mesolabum" proprement dit, intitulé: „Mesolabum seu duae mediae proportionales inter datas per circulum et ellipsim vel hyperbolam infinitis modis exhibitae" avec la dédicace au Prince Léopold et l'introduction au lecteur, qui le précèdent, et ensuite encore le chapitre „De problematum solidorum constructione per easdem lineas iisdem infinitis modis", à l'exception du „Lemma ultimum", de la „Propositio ultima" et de l'alinéa cité de la page 43 qui leur sert d'introduction. La „Pars altera de analysi" et les „Miscellanea" de la seconde édition, manquent complètement dans la première.

Quant à l'insertion dans la seconde édition de la „Propositio ultima"; elle est due à la correspondance avec Huygens. En effet, l'idée de Johan de Witt (voir la lettre N°. 663, p. 477 du T. II) que les constructions de problèmes solides gagneraient en élégance si l'on pouvait les exécuter à l'aide des intersections de cercles avec une conique donnée, tracée d'avance, cette idée n'était pas venue à de Sluse lors de la première édition du „Mesolabum". Toutefois comme il le remarque dans la lettre citée N°. 663, du 9 septembre 1659, des constructions de cette façon pouvaient être déduites aisément de celles qu'il avait publiées. C'est ce qu'il a fait pour le problème des deux moyennes dans cette „Propositio ultima", en employant un artifice semblable à celui dont Huygens s'est servi dans la seconde partie de l'„Appendice I", p. 221 du Tome présent.

66) Voir les p. 225—231 du Tome présent.

67) Voir les pp. 123, 127 et 133 du T. V.

de Huygens, comme celui-ci l'avoua dans la lettre par laquelle il accusa la réception d'un exemplaire de cette édition [68]).

Ce ne fut qu'en 1680 que Huygens s'occupa de nouveau des mêmes questions dans une communication, faite à l'Académie des sciences, intitulée: „Methode pour construire les Equations cubiques et quarréquarrés en les resolvant en deux lieux", dont nous ne connaissons que le début [69]).

Enfin en 1682 il composa un petit mémoire inédit: „Constructio problematum solidorum per resolutionem aequationis in duos Locos" [70]). Nous publierons ces pièces en leur propre lieu.

Probl. IV [71]).

Etant donné un carré dont l'un des côtés est prolongé, appliquer dans l'angle extérieur une droite de grandeur donnée, qui passe par le sommet opposé.

C'est de tous les problèmes des „Illustrium quorundam problematum constructiones", celui dont Huygens s'est occupé le premier, savoir dans la pièce N°. IV des „Travaux mathématiques divers de 1650" [72]). Pappus en avait donné une construction et démonstration; Descartes le traita dans sa „Géométrie" et van Schooten dans ses commentaires sur cette „Géometrie". Dans la pièce mentionnée Huygens arrive à une construction nouvelle; mais il préfère celle de Pappus dont il donne une démonstration différente [73]). Une autre démonstration se trouve dans une lettre à van Schooten du 23 octobre 1653 [74]). C'est cette dernière qui a passé avec une modification légère dans le texte du „Probl. IV" de l'ouvrage présent.

---

68) Voir la Lettre N°. 641, p. 442—443 du T. II. Elle n'est pas de juillet 1659, comme nous l'avions supposé, mais de septembre ou octobre 1668, puisqu' elle se rapporte évidemment non à la première, mais à la seconde édition du Mesolabum, laquelle contient l'analyse des solutions, publiées dans la première, et traite dans les „Miscellanea" le problème de la détermination du point d'inflexion de la conchoïde.

69) On le trouve p. 227—228 du Manuscrit N°. 9 (olim E).

70) Il occupe les pages 7—15 du Manuscrit N°. 11.

71) Voir la p. 199 du Tome présent.

72) Voir les p. 226—228 du T. XI.

73) Voir, pour plus de détails, les notes 2—6, p. 226—227 du T. XI.

74) Voir la p. 251 du T. I.

PROBL. V [75]).

Soit donné un carré dont deux côtés adjacents ſont prolongés, appliquer dans l'angle intérieur une droite de grandeur donnée, qui paſſe par le ſommet oppoſé. Il faut cependant que la droite donnée ne ſoit pas moindre que le double de la diagonale du carré.

Nonobſtant la reſſemblance entre ce problème et celui qui précède, Huygens ne s'eſt occupé de celui-ci que quelques années plus tard. La première rédaction, que nous connaiſſons de ſa conſtruction et démonſtration, eſt celle de la pièce N°. IV des „Travaux mathématiques divers de 1652 et 1653" [76]). Elle n'a ſubi que des modifications peu importantes dans la lettre à van Schooten du 23 octobre 1653 [77]) et dans le texte de l'ouvrage préſent. Probablement la conſtruction, vu ſa grande reſſemblance avec celle de Pappus du problème précédent, n'a pas été trouvée par l'analyſe.

PROBL. VI [78]).

Soit donné un loſange dont l'un des côtés ſoit prolongé, appliquer dans l'angle extérieur une droite de grandeur donnée, qui paſſe par le ſommet oppoſé.

Le problème fut mentionné par Pappus, comme pouvant ſe réſoudre par la règle et le compas, dans l'aperçu de l'ouvrage „De inclinationibus" d'Apollonius [79]). Il n'en donne la ſolution que pour le cas particulier du „Probl. IV" précédent, où le loſange eſt un carré.

Ghetaldi, dans ſon „Apollonius Redivivus, Seu Reſtituta Apollonii Pergaei Inclinationum Geometria" [80]) de 1607, traita le cas général, dont il trouva une ſolution aſſez élégante, en réduiſant le problème à un autre mentionné également

---

75) Voir les p. 199—201 du Tome préſent.
76) Voir les p. 19—20 du Tome préſent.
77) Voir les p. 250—251 du T. I.
78) Voir les pp. 201—203 et 207—209 du Tome préſent.
79) Voir la note 2 de la p. 239 du T. XI.
80) Voir les p. 17—19 de l'ouvrage cité en premier lieu dans la note 5, p. 126 du T. VIII. La ſolution ſe retrouve encore dans le réſumé de l'„Apollonius Redivivus" donné par Hérigone. Voir les p. 912—914 du Tome I du „Curſus mathematicus", ouvrage cité dans la note 4, p. 202 du T. I et qui parut en 1634.

par Pappus [81]) et résolu par Ghetaldi dans le même ouvrage. Il répéta cette solution dans l'ouvrage posthume „De Resolutione et Compositione Mathematica Libri Quinque" [82]), qui parut en 1640.

En 1650 Huygens, après s'être occupé du cas spécial du carré, prit en main le problème général. Guidé par une analyse semblable à celle qui lui avait réussi dans le cas spécial il trouva facilement une solution directe [83]), qu'il parvint ensuite à simplifier [84]).

Il reprit le même problème en 1652 [85]) en le considérant cette fois comme cas particulier du problème de mener par un point une droite dont deux droites, données en position, découpent un segment de longueur donnée. Ce dernier problème amène en général une équation biquadratique, mais par le choix des données Huygens en fait disparaître les termes qui contiennent la troisième et la première puissance de l'inconnue. De cette manière il retrouve facilement le problème qui nous occupe et la nouvelle solution, à laquelle il arrive, se montre être plus simple et plus élégante que celle de l'année 1650. La démonstration, qu' il y ajoute, laisse à désirer; mais vers la fin il indique les moyens de l'améliorer [86]).

Le 19 octobre 1653 [87]) il procède à une rédaction nouvelle, modifiant encore légèrement la construction et donnant à la démonstration la forme sous laquelle on la rencontre, sans altérations sensibles, dans la lettre à van Schooten du 23 octobre 1653 [88]) et dans le texte de l'ouvrage présent [89]).

En attendant il avait élaboré en août 1652 [90]) une autre solution qui provient probablement d'un remaniement de la solution de 1650. Il la communiqua à van Schooten dans une lettre du 10 décembre 1653 [91]) et la publia dans l'ouvrage présent sous la suscription „Utrumque praecedentium Aliter" [92]).

---

[81]) Le problème cité dans la note 2, p. 255 du T. XI. Consultez encore sur ce problème la note 3 de la même page.
[82]) Voir les p. 330—333 de l'ouvrage cité en dernier lieu dans la note 5, p. 127 du T. VIII.
[83]) Voir les p. 239—241 du T. XI.
[84]) Voir la „Constructio brevior" p. 241—242 du T. XI.
[85]) Voir la pièce N°. VI des „Travaux mathématiques divers de 1652 et 1653", p. 26—31 du Tome présent.
[86]) Voir la p. 31 du Tome présent.
[87]) Voir la note 10, p. 28 du Tome présent.
[88]) Voir les p. 247—248 du T. I.
[89]) Voir les p. 201—203, qui suivent.
[90]) Voir la pièce N°. XIII des „Travaux, etc.", p. 57—58 du Tome présent.
[91]) Voir la p. 256 du T. I.
[92]) Voir les p. 207—209, qui suivent.

Probl. VII [93]).

Soit donné un losange dont deux côtés adjacents sont prolongés, appliquer dans l'angle intérieur une droite de grandeur donnée qui passe par le sommet opposé. Il faut cependant que la droite donnée ne soit pas moindre que le double de la diagonale qui joint les deux autres sommets du losange.

Aux lieux cités plus haut Ghetaldi avait donné une solution de ce problème, comme du précédent [94]). Huygens s'en occupa pour la première fois le 11 février 1652 [95]), deux jours après qu'il avait trouvé sa nouvelle solution du problème précédent. Il y appliqua une analyse analogue mais un peu simplifiée et ajouta une démonstration qu'il répéta le 19 octobre 1652 [96]) dans une forme plus achevée, sous laquelle on la retrouve avec des modifications légères dans sa lettre à van Schooten du 23 octobre 1653 [97]) et dans le texte de l'ouvrage présent [98]). Cependant, à l'aide d'une analyse différente, il était arrivé le 17 février 1652 à une autre construction [99]), qu'il a considérée comme inférieure et qu'il n'a pas publiée. Une troisième construction, analogue à celle d'août 1652 du problème VI et qu' il avait élaborée le même jour, [100]) se retrouve sans modifications sensibles dans la lettre à van Schooten du 10 décembre 1653 [101]) et dans le texte de l'ouvrage présent après l'en-tête „Utrumque praecedentium Aliter" et en second lieu [102]).

Jusqu' à quel point Huygens a-t-il saisi la liaison intime qui existe entre les problèmes VI et VII, de manière que l'ensemble des racines de l'équation, amenée par l'analyse qui a pour but de résoudre l'un des problèmes, représente également les solutions de l'autre problème?

En 1650 il ne s'occupe que du premier problème, le seul mentionné expressé-

[93]) Voir les pp. 205—207 et 209—211, qui suivent.
[94]) Voir les p. 19—22 de l'„Appolonius Redivivus"; les p. 913—914 du „Cursus mathematicus" d'Hérigone et les p. 333—336 de l'ouvrage: „De Resolutione et Compositione Mathematica".
[95]) Voir les p. 32—37 du Tome présent.
[96]) Voir la note 16, p. 37 du Tome présent.
[97]) Voir les p. 248—250 du T. I.
[98]) Voir les p. 205—207, qui suivent.
[99]) Voir les p. 42—44 du Tome présent.
[100]) Voir la pièce N°. XIII, p. 58—59 du Tome présent.
[101]) Voir les p. 256—257 du T. I.
[102]) Voir les p. 209—211, qui suivent.

ment par Pappus [103]). De l'équation quadratique, à laquelle l'analyſe l'a conduit, il néglige la racine qui aurait pu amener la ſolution du ſecond problème [104]). Il agit de même en février 1652 avec les équations biquadratiques réductibles [105]) des pièces VI et VII des „Travaux mathématiques divers de 1652 et 1653". Des quatre racines il n'en prend en conſidération que les deux qui ſe rapportent au problème qu'il s'eſt poſé au début de la pièce.

Huygens a donc toujours traité les problèmes VI et VII (et de même les problèmes IV et V) comme des problèmes différents, néceſſitant pour leur ſolution des analyſes différentes. Toutefois l'expérience l'a convaincu de plus en plus de leur étroite analogie. Ainſi dans les „Illuſtrium quorundam problematum conſtructiones" il renvoie [106]) pour les conſtructions et les démonſtrations des problèmes V et VII à celles des problèmes IV et VI, leſquelles on peut appliquer mot pour mot aux figures nouvelles. Ce n'eſt que la démonſtration de la poſſibilité de la conſtruction ſous les conditions indiquées dans l'énoncé du problème, qui diffère; puisque, en effet, elle eſt bien plus ſimple dans ces derniers problèmes, qui, pour admettre des ſolutions réelles, n'exigent aucune limitation dans les données [107]).

Probl. VIII [108]).

Trouver dans une conchoïde les limites de la courbure contraire.

En septembre 1653 Huygens élabora [109]), en ſe ſervant de la première des méthodes décrites à la p. 101 du préſent „Avertiſſement", une ſolution univerſelle de ce problème, dans laquelle il employa les interſections d'un cercle et d'une parabole, et une autre ſolution, applicable entre certaines limites des données, à l'aide de la triſection de l'angle. Il mentionna ces ſolutions dans ſa lettre à van Schooten du 23 octobre 1653 [110]). On les retrouve dans le texte de l'ouvrage préſent.

En 1659 une autre ſolution, due à van Heuraet, fut publiée par van Schooten

[103]) Voir la note 2, p. 239 du T. XI.
[104]) Comparez les p. 240 et 241 du T. XI.
[105]) Elles se trouvent aux pages 27 et 33 du Tome présent.
[106]) Voir les pp. 201, 205 et 209, qui suivent.
[107]) Comparez les énoncés des problèmes en question.
[108]) Voir les p. 211—215, qui suivent.
[109]) Voir la pièce XX, p. 83—86 du Tome présent.
[110]) Voir la p. 246 du T. I.

dans les commentaires qui accompagnent ſa ſeconde édition de la „Geometria" de Deſcartes [111]).

Huygens la jugea ſupérieure à la ſienne [112]) en ce que la détermination du point d'inflexion s'y accomplit, ſans l'intervention d'une conique, à l'aide d'un cercle et de la conchoïde elle-même qu'on ſuppoſe tracée d'avance. Or, comme nous l'avons remarqué ailleurs [113]), Huygens préféra de beaucoup les conſtructions de cette façon aux autres. Il était même incliné à conſidérer les problèmes qui pouvaient être réſolu de cette manière comme des problèmes plans [114]).

Toutefois la ſolution de van Heuraet laiſſa beaucoup à déſirer au point de vue de la ſimplicité géométrique. Elle exigeait la conſtruction de ſegments dont la longueur eſt déterminée par des formes algébriques aſſez compliquées. Huygens chercha à la ſimplifier et y réuſſit en août 1659. A l'aide de ſes annotations nous avons pu reconſtituer cette ſolution, qu'on trouvera dans l'„Appendice IV" [115]) de l'ouvrage préſent. En la comparant avec celle de van Heuraet on s'aperçoit que l'artifice principal qui conſiſte dans la comparaiſon terme pour terme des deux équations cubiques après la multiplication des racines de l'une d'elles par un facteur indéterminé [116]), fut déjà employé par van Heuraet; mais que d'ailleurs la ſolution de ce dernier eſt bien plus longue et moins élégante que celle de Huygens.

En 1680 Huygens s'occupe de nouveau du même problème [117]). Enfin en 1687 il conſulte ſes anciennes annotations [118]) pour communiquer ſa conſtruction au ſieur H. Coets [119]) et il reprend même pour un moment le fil de ſes recherches. Cette fois il s'agit de la „determinatio" de ſa ſolution, c'eſt-à-dire, des limites entre leſquelles elle eſt applicable. Déjà en 1659 Huygens s'était aperçu

[111]) Voir les p. 258—262 de l'ouvrage cité.

[112]) Voir sa lettre à de Sluse, p. 443 du T. II; mais consultez sur cette lettre la note 68. Voir encore la lettre à Coets du 27 août 1687, p. 200 du Tome IX.

[113]) Voir la p. 7 du Tome présent.

[114]) Van Schooten évidemment était du même avis puisqu'au lieu cité plus haut il s'exprime comme il suit à propos de la solution de van Heuraet: „sic ut ad constructionem ejus non nisi regula atque circino utamur, haud secus ac si Problema foret Planum" (p. 259).

[115]) Voir les p. 232—237, qui suivent.

[116]) Voir, aux pp. 232 et 234, qui suivent, les notes 4 et 11 de l'Appendice mentionné.

[117]) Voir la note 15 de l'Appendice IV, p. 236, qui suit.

[118]) Celles que nous avons utilisées dans l'Appendice IV.

[119]) Voir les p. 200—201 du T. IX.

que ſa conſtruction n'était pas toujours exécutable et il avait même indiqué la limite de ſa validité [120]); mais il n'avait pas encore recherché ſi celle de van Heuraet eſt ſujette au même inconvénient. A cet effet il examine maintenant deux cas extrèmes et s'aſſure que dans ces cas elle eſt réaliſable. Sans s'arrêter au cas général, difficile à traiter, il en conclut que la conſtruction de van Heuraet „pour le point de la courbure de la conchoide peut ſervir toujours" [121]).

---

[120]) Voir, dans le volume présent, la note 16 de l'Appendice IV. C'est donc à tort que dans le dernier alinéa de la note 4, p. 202 du T. IX, il a été supposé que cette question des limites de la validité de la construction ne s'est pas présentée à l'esprit de Huygens avant 1687. Une inspection plus minutieuse des annotations de 1659, très difficiles à déchiffrer, nous a mieux renseigné.

[121]) Consultez encore le dernier alinéa de la note 4, p. 202 du T. IX.

CHRISTIANI HUGENII, CONST. F.

DE

CIRCULI MAGNITUDINE INVENTA.

ACCEDUNT EIUSDEM

Problematum quorundam illustrium Constructiones.



LUGDUNI BATAVORUM,
Apud JOHANNEM & DANIELEM ELZEVIER.
Academ. Typograph.

cIↄ Iↄc LIV.

PRÉFACE.

Eſtimant nous avoir occupé récemment avec quelque succès de l'antique problème de la quadrature du cercle, le plus célèbre de tous aux yeux même de ceux qui n'entendent pas les Mathématiques, et ayant obtenu quelques choſes meilleures, à ce que nous croyons, que ce qui a été trouvé juſqu' ici, nous les voulons communiquer aux Géomètres avec leurs démonſtrations. Car nous jugeons que non ſeulement elles feront utiles à leurs études, mais auſſi que, par leur nouveauté même, elles ſerviront d'aiguillon à la recherche de choſes cachées pour ceux qui conſidéreront que même ſur un champ, où tous ont travaillé depuis longtemps avec le plus grand effort, il reſtait encore à conquérir à la diligence des prix de quelque valeur. Pluſieurs, il eſt vrai, ont tâché précédemment de s'attribuer la gloire de l'invention de la Quadrature et ont produit de temps en temps diverſes réflexions où le vrai et le faux ſe trouvaient mélangés. Mais nous ſavons que toutes ces choſes ont été ou renverſées ou mépriſées par de plus compétents et que juſqu' ici, de tout ce qui pourrait ſervir de baſe pour trouver la dimenſion du cercle, rien n'a été accepté que cette ſeule vérité, que le cercle eſt plus grand que le polygone qui lui eſt inſcrit et plus petit que le polygone circonſcrit. Mais nous, nous énonçons une détermination plus approchée et démontrons, que *ſi l'on prend deux polygones, moyens proportionnels entre l'inſcrit et le circonſcrit et qui leur ſont ſemblables, le périmètre du plus petit d'entr' eux eſt plus grand que la circonférence du cercle, et que l'autre polygone excède l'aire du cercle dans la même proportion* [1]). Et quoique parmi les propoſitions que nous allons démontrer celle-ci paraiſſe la plus difficile et particulièrement digne de contemplation, il y en a cependant d'autres, qui non ſeulement ſont plus préciſes [2]), mais qui dans leur usage ſe montreront plus propres; leſquelles toutefois nous ne paſſerons pas en revue dans cette préface, parce que dans la ſuite elles pourront être mieux compriſes. Mais il pourra être à propos d'expoſer brièvement ce qu'elles contribuent à l'étude de la Géométrie, parce qu'elles ſe recommandent par leur utilité non négligeable. Ainſi donc, comme nous avons inſtitué une double manière de traiter notre ſujet, d'abord en donnant ce dont la démonſtration eſt compriſe dans les éléments ordinaires de la Géométrie, enſuite en employant auſſi la conſidération

PRÆFATIO.

Circa antiquum Tetragonifmi problema, quo vel apud Mathematum ignaros nihil eft celebrius, recens operæ pretium nos feciffe rati, & quædam hactenus compertis meliora ut putamus confecuti, Geometris ea demonftrata impertiri volumus. Namque & ftudiis eorum profutura arbitramur, & novitate ipfâ ad rerum abditarum inveftigationem incitamento futura, reputantibus in eo quoque argumento, ubi omnes pridem fummâ contentione verfati fint, aliqua fuperfuiffe haud indigna diligentiæ præmia. Plurimi quidem antehac inventæ Quadraturæ gloriam fibi afferere conati funt, variaque fubinde commenta protulere, falfis vera mifcentes. Verum à peritioribus omnia vel everfa fuiffe vel contempta fcimus, neque aliud adhuc receptum, quo omnis circuli dimenfio niteretur, præter unum illud, majorem effe eum infcripto fibi polygono, circumfcripto minorem. Nos autem propiorem determinationem nunc exhibemus oftendimufque, quod duobus fumptis polygonis proportione mediis inter infcriptum circumfcriptumque ipfis fimile, minoris eorum perimeter circumferentià circuli major exiftit, reliquum vero polygonum eâdem proportione circuli aream exuperat [1]). *Et hoc quidem ut inter ea quæ demonftraturi fumus & difficillimum & contemplatione præcipuè dignum videatur, alia tamen funt non accuratiore modò* [2]), *fed quæ & ufu magis probentur; quæ fanè hic in anteceffum non recenfebimus, quippe in fequentibus rectius percipienda. Breviter tamen quid ftudiis Geometriæ conferant expofuiffe proderit, cum non minimam habeant utilitatis commendationem. Cum igitur duplicem propofiti tractationem inftituerimus, primùm ea tradendo quorum demonftratio confuetis Geometriæ elementis contenta eft, deinde centrorum gravitatis quoque confiderationem adhibendo:*

---

[1]) Voir le „Theor. XI. Prop. XIV", p. 151 du Tome présent. Il est vrai que, dans l'énoncé du théorème cité, on ne trouve pas indiqué *l'égalité* des deux proportions, c'est-à-dire, du rapport du périmètre du moindre des deux polygones à la circonférence du cercle et de celui de l'aire du plus grand à celle du cercle; toutefois cette égalité est exprimée plus loin, vers la fin de la démonstration (p. 155), par la phrase: „Ex aequali igitur, erit polygonum Y ad circulum BD sicut X ad circumferentiam BD".

[2]) Comparez les notes 13 et 17 aux pp. 96 et 97 du Tome présent.

des centres de gravité: on trouvera dans la première partie expliqué comment on peut construire non seulement une droite égale à la circonférence entière [3]) mais aussi celle qui est égale à un arc donné quelconque [4]), en ramenant la solution à des constructions mécaniques, de manière qu'elle ne se trouve en défaut même dans les plus subtiles de ces constructions. Comment aussi le rapport de la périphérie au diamètre, qu' Archimède déduisit des polygones de 96 côtés, peut être vérifié par les calculateurs au moyen du dodécagone seulement [5]). Mais tandis que ceux qui suivent l'ancienne voie trouveront par le polygone de 10800 côtés à peine les limites 62831852 et 62831855 parties dont le diamètre en contient 20000000, ils verront que par notre Méthode il vient 6283185307179584, 6283185307179589 [6]); et que l'on obtient toujours le nombre double de chiffres vrais, quel que soit le nombre de côtés du polygone employé. Et nous avons reconnu que cela est ainsi pour une raison certaine [7]) de même aussi que le carré d'un nombre quelconque se compose ordinairement d'un nombre de chiffres double de celui de la racine. Mais une propriété des centres de gravité rend le calcul encore plus compendieux, et par elle nous semblons en quelque sorte avoir approché plus près à la perfection de ce problème irrésoluble. En effet, pour établir les limites de la périphérie, obtenues par Archimède, nous n'avons besoin que de connaître le côté du triangle inscrit [8]). Mais du polygone de soixante côtés nous démontrons [9]) qu'elle est contenue entre 31415926538 et 31415926533, en attribuant au diamétre 10000000000 parties, tandis que la méthode usuelle produit à peine les nombres 3145 et 3140. De manière que le nombre de chiffres vrais est maintenant le triple et plus, de même que le double par la méthode précédente; et cela continue ainsi toujours, tout comme on remarque que dans les grands nombres le cube contient trois fois autant de chiffres que sa racine [7]). De sorte que si dorénavant il y en a qui définissent faussement la grandeur de la circonférence du cercle, ils ne seront plus réfutés par des polygones à côtés nombreux, mais par un calcul bref et nullement compliqué, qu'ils ne pourront plus facilement accuser d'erreur, comme ils sont presque habitués jusqu' ici. De plus, si dans la Table des cordes, dont chacun sait combien il importe qu'elle soit corrigée, des erreurs ont été faites pendant sa composition ou se sont glissées venant d'ailleurs, il ne sera pas difficile de les corriger au moyen de notre méthode, puisque maintenant on peut trouver d'une autre manière au moyen des inscrites dans le cercle, la longueur des arcs soustendus. Et même à ceux qui manquent de tout aide des Tables nous montrons de quelle manière ils peuvent déduire des côtés donnés les angles des triangles [10]), de façon que l'écart de la valeur vraie ne soit jamais de deux secondes, et souvent même pas d'une tierce. Et nous avons la confiance que cela sera considéré comme

---

[3]) Voir le „Problema II. Prop. XI", p. 143 du Tome présent.

[4]) Voir le „Problema III. Prop. XII", p. 147.

in prioribus quidem illud explicatum reperietur, quomodo non tantum circumferentiæ toti [3]*, ſed & arcui cuilibet dato recta linea æqualis invenienda ſit* [4]*; expeditâ ratione ad Mechanicas conſtructiones, quæque vel ſubtiliſſimas earum minimè fruſtretur. Quomodo item numeros excercentibus peripheriæ ad diametrum ratio, quam Archimedes ex polygonis laterum* 96 *eruit, per dodecagona ſola comprobari queat* [5]*. Ex polygonis autem laterum* 10800, *cum iis qui veterem inſiſtunt viam vix hi peripheriæ termini exiſtant* 62831852 & 62831855, *ad diametrum partium* 20000000, *noſtrâ Methodo iſti prodiiſſe cernentur*, 62831853071795 84, 62831853071795 89 [6]*; ſemperque duplicem obtineri verorum characterum numerum, quacunque laterum multitudine polygona adhibeantur. Quod quidem certâ ratione contingere* [7] *perſpeximus ſicuti & quadratum cujuſque numeri bis totidem quot latus characteribus plerumque conſtituitur. At majora etiam compendia centrorum gravitatis proprietas ſubminiſtrat, & propius quodammodo ad perfectionem inſuperabilis problematis per hæc acceſſiſſe videmur. Certè ad Archimedeos peripheriæ limites conſtituendos, ſolo nunc inſcripti trigoni cognito latere indigemus* [8]*. E ſexagintangulo autem inter hoſce eam contineri probamus* [9] 31415926538 & 31415926533, *poſitâ diametro partium* 10000000000, *cum ſolitâ methodo vix iſti producantur* 3145, 3140. *Adeo ut triplus jam & ultra ſit verarum hic notarum numerus, ſicut per præcedentia duplus; & perpetuo quidem ſucceſſu, haud aliter quam in majoribus numeris cubum ſui lateris triplum eſſe animadvertitur* [7]*. Ergo poſthac ſi qui falsò circumferentiæ magnitudinem definient, per numeroſa polygona non refutabuntur, ſed calculo brevi miniméque intricato, quemque erroris inſimulare, quod hactenus ferè ſoliti ſunt, haud facile poſſint. Ad hæc ſi quid in ſubtenſarum Canone, quem emendatum haberi quantum referat omnes ſciunt, in eo contexendo ſi quid erit admiſſum aut aliunde perverſum irrepſerit, non difficile erit horum ope reſtituere, cum aliâ nunc ratione ex inſcriptis in circulo longitudinem arcuum quibus ſubtenduntur invenire liceat. Quinimo & omni Canonum auxilio deſtitutis oſtendimus, quo pacto ex lateribus triangulorum datis angulos eorum inveſtigare queant* [10]*, ut nunquam duorum ſecundorum ſcrupulorum ſit à vero diſſenſus, ſæpe ne unius quidem tertii. Et hæc quidem non levia commoda viſum iri confidimus. Comperimus autem & Renatum*

---

[5]) Comparez le „Problema I. Prop. X", p. 139.

[6]) Comparez la dernière partie (p. 143) de la proposition citée dans la note précédente.

[7]) Voir la note 15, p. 142 du Tome présent.

[8]) Comparez les p. 173—177 du Tome présent.

[9]) Comparez la p. 179.

[10]) Le sujet n'est pas traité expressément dans l'ouvrage présent; mais on peut le rattacher facilement au dernier alinéa de la page 179. En effet, par le calcul de la hauteur du triangle on trouve aisément la corde qui appartient au double de chacun de ses angles; ensuite cet alinéa apprend à determiner les arcs soustendus par ces cordes, d'où l'on peut déduire, en se servant du nombre π, les grandeurs des angles cherchés. Voir encore le dernier alinéa, p. 163 de la démonstration du „Theorema XIII", où sont mentionnés les travaux de Snellius sur ce même sujet.

un avantage non léger. Mais nous avons reconnu que René Defcartes, dont les inventions ont illuftré non feulement la Philofophie univerfelle mais furtout les Mathématiques, a mis par écrit quelques chofes qui fe rapportent à ce fujet [11]). On dit qu' après fa mort elles ont été trouvées dans fes notices, et jufqu' ici nous n'avons pu favoir par quelle méthode et avec quel fuccès il y a mis la main. Mais de Willebrord Snellius, le favant géomètre, nous avons le Cyclometricus [12]), écrit laborieux et entièrement confacré à cette matière. Et il aurait paru mériter de grandes louanges, s'il eût pu démontrer les deux théorèmes principaux [13]) fur lefquels, comme fur des fondements, tout cet ouvrage eft conftruit. Mais ce qu'il y veut avoir admis comme démonftrations ne prouve nullement ce qui eft propofé: toutefois ces deux théorèmes, comme nous le montrerons d'une manière évidente pour chacun d'eux, contiennent une vérité importante. Et nous avons jugé qu'ils devraient être inférés à bon droit dans ce qui fuit, parce que leurs caufes dépendent de nos inventions.

[11]) Sous la date du 31 déc. 1653, Constantijn Huygens, père, écrivit à la Princesse Élizabeth: „Monsieur Chanut, qui possede tous les papiers du defunct [M. Descartes], & prétend d'en faire imprimer quelques Lettres d'eslite, desire feuilleter le tout aueq mond[t] Archimede pour veoir ce qu'il y a encor de Philosophique ou de Mathematique, dont on pourroit faire part au publiq, n'y ayant point de brouillon de ceste merueilleuse main, à mon aduis, qui ne le merite".

Or, Chanut, qui avait recueilli ces papiers à Stockholm lors du décès de Descartes, était alors ambassadeur de France à la Haye. Mais il semble qu'il n'a pas donné suite à son intention de les montrer à Christiaan Huygens avant de les envoyer en France, où il les confia aux soins de Clerselier.

Toutefois Christiaan Huygens a pu prendre connaissance de l'inventaire, dressé à Stockholm, des manuscrits de Descartes, dont une copie était dans la possession de son père. On y lit sous la lettre B:

„Un Registre relié, & couvert de parchemin, ... Le second feuillet porte en teste: Ex quantitate linearum, quae in dato circulo inscriptae sunt, quantitatem circumferentiae, cui datae lineae subtenduntur, cognoscere".

La pièce qui avait ce titre fut publiée en 1701 dans l'ouvrage: „R. Des-Cartes Opuscula

Cartesium, cujus viri inventis cum Philosophia universa tum Mathesis plurimum illustrata est, nonnulla quæ huc spectent scriptis mandasse [11]*). Ea verò defuncto ipso in commentariis reperta feruntur, neque adhuc rescire potuimus quâ industriâ aut eventu hisce manum admoverit. Willebrordi autem Snellii geometræ eruditi Cyclometricus* [12]*) extat, multo labore conscriptus, quique omnis in his est. Atque ille non exiguam laudem promeritus videretur, si præcipua duo theoremata, quibus omne id opus velut fundamentis superstructum est, demonstrare potuisset* [13]*). Sed quas ibi pro demonstrationibus haberi postulat, propositum minimè comprobant: ipsa verò theoremata, sicut in utroque evidenti ratione nos ostendimus, præclaram continent veritatem. Et ea quidem sequentibus meritò inferenda putavimus, quod causæ eorum à nostris pendeant inventis.*

---

posthuma, physica & mathematica. Amstelodami, ex typographiâ P. & J. Blaeu, MDCCI". On la trouve dans l'édition récente des „Œuvres de Descartes" d'Adam et Tannery aux pages 285—289 du T. X.

Elle contient un tableau des valeurs irrationnelles des cordes dérivant des côtés du carré, du triangle équilateral, du pentagone et du pentadécagone réguliers.

En outre, on trouve dans cette même publication de 1701 un article, qui donne, sous la suscription: „Circuli quadratio", une construction ingénieuse par laquelle on peut approcher indéfiniment à la longueur du diamètre d'un cercle dont la circonférence est donnée; voir les p. 304—305 du T. X de l'édition d'Adam et Tannery.

Pour plus de détails on peut encore consulter de cette même édition les pp. 1—5, 279—284 du T. X.

[12]) Consultez, sur Snellius et sur l'ouvrage cité, les notes 5 et 6, p. 94 du Tome présent.

[13]) Voir, sur ces théorèmes, la note 8, p. 95 du Tome présent et les pp. 157 et 159 du même Tome.

CHRISTIAAN HUYGENS, FILS DE CONSTANTIN.

SUR

L'INVENTION DE LA GRANDEUR DU CERCLE.

Theorème I. Proposition I.

Si dans un ſegment de cercle, moindre que la moitié du cercle [1]), *on inſcrit le plus grand triangle poſſible, et pareillement des triangles dans les ſegments reſtants, le triangle décrit en premier lieu ſera moindre que le quadruple de la ſomme des deux décrits dans les ſegments reſtants.*

Soit ABC le ſegment de cercle, moindre que la moitié du cercle [1]), dont le diamètre eſt BD, et le plus grand triangle inſerit ABC, c'est-à-dire ayant la même baſe et la même hauteur que le ſegment. Et ſoient inſcrits de même dans les ſegment reſtants les plus grands triangles poſſibles AEB, BFC. Je dis que le triangle ABC eſt moindre que le quadruple de la ſomme des deux triangles AEB, BFC. Tirons la droite EF, qui coupe le diamètre du ſegment en G. Puis donc que l'arc AB eſt divisé en deux parties égales au point E, EA et EB ſeront chacune plus grande que la moitié de AB. Par ſuite le carré de AB ſera moindre que le quadruple du carré de EB ou de EA. Mais, comme le carré de AB eſt au carré de EB, ainſi eſt la longueur de DB à celle de BG, parce que le carré de AB eſt égal au rectangle conſtruit ſur DB et le diamètre du cercle entier, et le carré de EB égal au rectangle conſtruit ſur le même diamètre et la droite BG. BD eſt donc moindre que le quadruple de BG. Mais AC eſt également moindre que le double de EF parce que celle-ci eſt égale à AB. Il paraît donc que le triangle ABC eſt moindre que l'octuple du triangle EBF. Mais à ce dernier triangle eſt égal chacun des deux AEB, BFC. Par conſéquent ABC ſera moindre que le quadruple de la ſomme de ces deux derniers triangles. Ce qu'il fallait démontrer.

[1]) Voir les „Errata", p. 215; mais la restriction n'est pas nécessaire, le théorème et la démonstration restant valables dans le cas où le segment excède un demi-cercle.

CHRISTIANI HUGENII, CONST. F.

DE

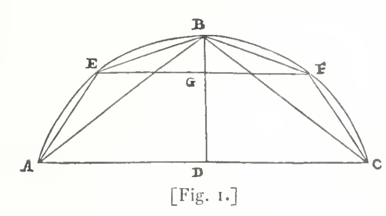
CIRCULI MAGNITUDINE

INVENTA.

Theorema I. Propositio I.

Si Circuli portioni ſemicirculo minori [1]), *triangulum maximum inſcribatur, & portionibus reliquis triangula ſimiliter inſcribantur, erit triangulum primo deſcriptum duorum ſimul quæ in portionibus reliquis deſcripta ſunt minus quam quadruplam.*

Eſto circuli portio ABC ſemicirculo minor [1]), cujus diameter BD; maximum autem inſcriptum ſit triangulum ABC, hoc eſt, quod baſin & altitudinem habeat cum portione eandem. Et reliquis duabus portionibus inſcribantur triangula item maxima AEB, BFC. Dico triangulum ABC minus eſſe quam quadruplum triangulorum AEB, BFC ſimul ſumptorum. Jungatur enim EF, quæ ſecet diametrum portionis in puncto G. Quoniam igitur arcus AB bifariam dividitur in E puncto, erit utraque harum EA, EB, major dimidiâ AB. Quamobrem quadratum AB minus erit quam quadruplum quadrati EB vel EA. Sicut autem quadratum AB ad quadr. EB, ita eſt DB ad BG longitudine; quia quadratum quidem AB æquale eſt rectangulo quod à DB & circuli totius diametro continetur, quadratum verò EB æquale rectangulo ſub eadem diametro & recta BG. Minor igitur eſt BD quam quadrupla BG. Sed & AC minor eſt quam dupla EF, quoniam hæc ipſi AB æquatur. Ergo patet triangulum ABC minus eſſe quam octuplum trianguli EBF. Huic autem triangulo æquantur ſingula AEB, BFC. Ergo utriuſque ſimul triangulum ABC minus erit quam quadruplum. Quod erat oſtendendum.



[Fig. 1.]

Théor. II. Prop. II.

Soient donnés un ſegment moindre que la moitié du cercle, et ſur ſa baſe un triangle dont les côtés ſont tangents au ſegment; ſoit tirée de plus une droite tangente au ſegment dans ſon ſommet: cette droite coupera du triangle nommé un triangle plus grand que la moitié du plus grand triangle que l'on puiſſe inſcrire dans le ſegment.

Soit ABC le ſegment de cercle, moindre qu'un demi-cercle, B ſon ſommet. Et AE, CE les deux tangentes aux extrémités de la baſe, leſquelles ſe rencontrent en E; elles ſe rencontreront parce que le ſegment eſt moindre qu'un demi-cercle. Soit tirée de plus FG, tangente au ſommet B et joignons AB, BC. Il faut donc montrer que le triangle FEG eſt plus grand que la moitié du triangle ABC. Il eſt certain que les triangles AEC, FEG, de même que AFB, BGC ſont iſocèles et que FG eſt diviſée par B en deux parties égales. Or, la ſomme de FE et EG eſt plus grande que FG; donc EF eſt plus grande que FB, ou plus grande que FA. La droite entière AE eſt donc moindre que le double de FE. Par conſéquent le triangle FEG ſera plus grand que le quart du triangle AEC. Mais comme FA à AE, ainſi eſt la hauteur du triangle ABC à la hauteur du triangle AEC et la baſe de ces deux triangles eſt la même AC. Donc, comme FA eſt moindre que la moitié de AE, le triangle ABC ſera moindre que la moitié du triangle AEC. Mais le triangle FEG était plus grand que le quart du triangle AEC. Donc le triangle FEG eſt plus grand que la moitié du triangle ABC. Ce qu'il fallait démontrer.

Théor. III. Prop. III.

Tout ſegment de cercle, moindre que la moitié du cercle [1]) *eſt au plus grand triangle inſcrit dans un rapport plus grand que quatre à trois.*

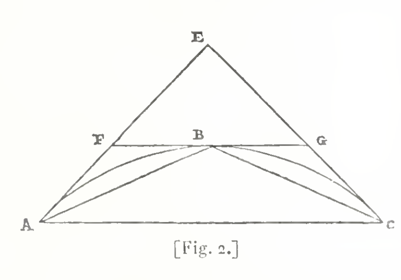
Soit un ſegment de cercle [Fig. 3], moindre qu'un demi-cercle [1]), dans lequel eſt inſcrit le plus grand triangle poſſible ABC. Je dis que ce ſegment eſt au dit triangle dans un rapport plus grand que quatre à trois. Inſcrivons, en effet, dans les deux ſegments reſtants les triangles les plus grands ADB, BEC. Le triangle ABC eſt ainſi plus petit que le quadruple de ceux-ci enſemble *: et pour cette raiſon on peut ajouter au triangle ABC un certain eſpace, qui, joint à lui, ſoit encore plus petit que le quadruple de la ſomme des triangles ADB, BEC. Soit donc ajouté

* *d'après* I. *ici.*

Theor. II. Prop. II.

Si fuerit circuli portio ſemicirculo minor, & ſuper eadem baſi triangulum, cujus latera portionem contingant; ducatur autem quæ contingat portionem in vertice: Hæc à triangulo dicto triangulum abſcindet majus dimidio maximi trianguli intra portionem deſcripti.

Eſto circuli portio ſemicirculo minor ABC, cujus vertex B. Et contingant portionem ad terminos baſis rectæ AE, CE, quæ conveniant in E: convenient enim quia portio ſemicirculo minor eſt. Porro ducatur FG, quæ contingat ipſam in vertice B; & jungantur AB, BC. Oſtendendum eſt itaque, triangulum FEG majus eſſe dimidio trianguli ABC. Conſtat triangula AEC, FEG, item AFB, BGC æquicruria eſſe, dividique FG ad B bifariam. Utraque autem ſimul FE, EG, major eſt quam FG; ergo EF major quam FB, vel quam FA. Tota igitur AE minor quam dupla FE. Quare triangulum FEG majus erit quarta parte trianguli AEC. Sicut autem FA ad AE, ita eſt altitudo trianguli ABC ad altitudinem trianguli AEC, & baſis utrique eadem AC. Ergo, quum FA ſit minor quam ſubdupla totius AE, erit triangulum ABC minus dimidio triangulo AEC. Hujus verò quarta parte majus erat triangulum FEG. Ergo triangulum FEG majus dimidio trianguli ABC. Quod oſtendendum fuit.



[Fig. 2.]

Theor. III. Prop. III.

Omnis circuli portio ſemicirculo minor [1]), *ad maximum triangulum inſcriptum majorem rationem habet quam ſeſquitertiam.*

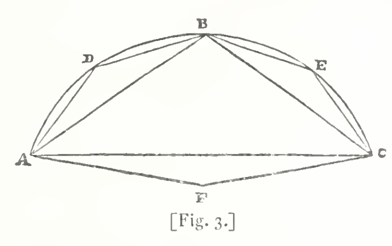
Eſto Circuli portio [Fig. 3] ſemicirculo minor [1]), cui maximum ſit inſcriptum triangulum ABC. Dico portionem ad dictum triangulum majorem rationem habere quam quatuor ad tria. Inſcribantur enim & reliquis portionibus duabus maxima triangula ADB, BEC. Itaque minus eſt triangulum ABC quam illorum ſimul quadruplum*: ac proinde ſpatium aliquod adjungi poteſt triangulo ABC, quod una cum ipſo minus etiam ſit quam quadruplum dictorum ſimul triangulorum ADB, BEC. *per 1. huj.

pour ce motif le triangle AFC, tel que tout l'efpace ABCF foit moindre que le quadruple des triangles ADB, BEC. Et figurons nous qu' enfuite des triangles maxima foient infcrits dans les fegments reftants; et ainfi toujours dans les fegments reftants, jufqu' à ce que les fegments dans lefquels on a infcrit en dernier lieu foient enfemble plus petits que le triangle ACF, car cela peut fe faire [2]). Ainfi auffi les triangles infcrits en dernier lieu feront enfemble moindres que le triangle ACF. Mais puifque les deux triangles ADB, BEC font enfemble plus grands que la quatrième partie de l'efpace ABCF. Et que de nouveau les quatre triangles, qui font infcrits dans les fegments reftants, font plus grands que la quatrième partie de ceux-là. Et de même plus grands que leur quart, ceux qui font infcrits enfuite; et ainfi continuellement, s'il y en a plufieurs qui font décrits. En conféquence l'efpace compofé du quadrilatère ABCF et des autres triangles infcrits, et du tiers de ceux qui feront infcrits en dernier lieu, fera plus grand que les quatre tiers de ce quadrilatère ABCF. Car il a été démontré par Archimède [3]) que fi l'on a un nombre quelconque d'efpaces, qui font en raifon quadruple, l'enfemble de tous avec le tiers du plus petit eft au plus grand dans le rapport de quatre à trois. Ainfi, par partage, tous les triangles décrits dans les fegments ADB, BEC, avec le tiers de ceux décrits en dernier lieu, feront plus grands que la troifième partie de l'espace ABCF. Mais le tiers fufdit eft moindre que le tiers du triangle ACF. Par fuite, enlevant d'un côté le tiers des triangles décrits en dernier lieu; et retranchant d'autre part de l'efpace ABCF le triangle AFC, tous les triangles décrits dans les fegments ADB, BEC feront
* 33.5. *Élem.**) plus grands que le tiers du triangle ABC *. Donc, par compofition, toute la figure rectiligne infcrite dans le fegment ABC eft plus grande que les quatre tiers du triangle ABC, et à plus forte raifon le fegment lui-même. Ce qu'il fallait démontrer.

[2]) On peut consulter à cet égard la démonstration de la Prop. 2 du Livre 12 des „Elementa" d'Euclide.

[3]) Voici la Prop. 23 de son ouvrage „Quadratura parabolae": „Si magnitudines quotcunque consequenter in proportione quadrupla disponantur, hae magnitudines simul omnes cum

Esto itaque eâ ratione adjectum triangulum AFC, ut totum spatium ABCF minus sit quam quadruplum triangulorum ADB, BEC. Et porro in residuis portionibus maxima triangula inscribi intelligantur; itemque in residuis semper, donec portiones quibus postremùm inscribentur simul minores sint triangulo ACF, hoc enim fieri potest [2]). Itaque & triangula postremùm inscripta simul triangulo ACF minora erunt. Quia autem spatii ABCF quarta parte majora sunt duo simul triangula ADB, BEC. Rursusque quarta horum parte majora triangula quatuor, quæ portionibus reliquis inscribuntur. Et horum quartâ majora similiter, quæ deinceps: atque ita continuè, si plura fuerint descripta. Erit propterea spatium ex quadrilatero ABCF & cæteris inscriptis triangulis, & triente eorum, quæ postremo inscripta erunt, compositum, majus quam sesquitertium ipsius quadrilateri ABCF. Hoc enim ab Archimede demonstratum est [3]), quod si fuerint spatia quotcunque in ratione quadrupla, ea omnia simul cum triente minimi ad maximum rationem habebunt sesquitertiam. Dividendo itaque, triangula omnia intra portiones ADB, BEC descripta cum triente postremo descriptorum majora erunt tertia parte spatii ABCF. Sed triens dictus minor est triente trianguli ACF. Igitur dempto illinc triente postremò inscriptorum; à spatio autem ABCF ablato triangulo AFC, erunt triangula omnia intra portiones ADB, BEC descripta, majora triente trianguli ABC*. Quare componendo, tota figura rectilinea portioni ABC inscripta major quam sesquitertia trianguli ABC, multoque magis portio ipsa. Quod erat demonstrandum. * 33.5.*Elem.* [4])



[Fig. 3.]

tertia parte minimae illarum, sunt sesquitertiae magnitudini illarum maximae"; p. 154 de l'édition de Basle (Heiberg, T. II, p. 347).

Voir sur ces éditions des Œuvres d'Archimède la note 3, p. 274 du Tome XI.

4) „Si fuerit maior proportio totius ad totum, quam ablati ad ablatum: Erit & reliqui ad reliquum maior proportio, quam totius ad totum". Voir p. 526 de l'édition, citée dans la note 10, p. 97 du T. XI, des „Elementa" d'Euclide, par Clavius.

Théor. IV. Prop. IV.

Tout ſegment de cercle, plus petit que la moitié du cercle, eſt moindre que les deux tiers du triangle qui a la même baſe et dont les côtés touchent le ſegment.

Soit donné un ſegment de cercle, moindre que le demi-cercle, ABC, et ſuppoſons qu'il ſoit touché aux extrémités de la baſe par les droites AD, CD, qui ſe rencontrent au point D. Je dis que le ſegment ABC eſt moindre que les deux tiers du triangle ADC. Menons en effet EF, qui touche le ſegment au ſommet B, et inſcrivons le triangle maximum ABC. Comme alors le triangle EDF eſt plus grand que la moitié du triangle ABC*, il eſt évident que l'on peut découper de celui-là une partie telle, que le reſte ſoit pourtant encore plus grand que la moitié du dit triangle ABC. Soit donc découpé, conformément à cela, le triangle EDG. Et menons enſuite les droites HI, KL, qui touchent les ſegments reſtants AMB, BNC en leurs ſommets, et inſcrivons dans ces mêmes ſegments les triangles les plus grands. Et figurons-nous enſuite que la même choſe ſoit faite ſur les ſegments reſtants, juſqu'a ce qu'enfin les ſegments reſtants ſoient enſemble plus petites que le double du triangle EDG. Il y aura donc alors une certaine figure rectiligne inſcrite dans le ſegment et une autre qui lui eſt circonſcrite. Et puiſque le triangle EGF eſt plus grand que la moitié du triangle ABC, et qu'à leur tour les triangles HEI, KFL ſont plus grands que les moitiés des triangles AMB, BNC; et que cela a lieu pour le même motif pour les autres ſegments, ſavoir, que les triangles conſtruits au-deſſus des ſommets des ſegments ſont plus grands que les moitiés de ceux qui ſont décrits dans les ſegments mêmes: il eſt clair que tous les triangles ſitués en dehors du ſegment, même ſans le triangle EGD, ſont enſemble plus grands que les moitiés de tous les triangles décrits dans les ſegments. Mais le triangle EGD eſt auſſi plus grand que la moitié des ſegments reſtants mentionnés. Par conſéquent le triangle EDF, avec les autres triangles qui ſont en dehors du ſegment, ſera plus grand que la moitié de tout le ſegment ABC. Donc à plus forte raiſon l'eſpace compris entre les droites AD, DC et l'arc ABC ſera plus grand que la moitié du ſegment ABC. Et ainſi le triangle ADC eſt plus grand que une et demie fois le ſegment ABC. Ce qu'il fallait démontrer.

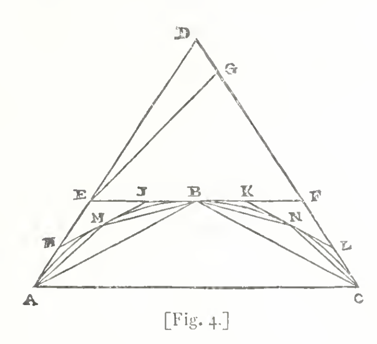
*d'après 2. ici.

THEOR. IV. PROP. IV.

Omnis circuli portio ſemicirculo minor, minor eſt duabus tertiis trianguli eandem cum ipſa baſin habentis, & latera portionem contingentia.

Eſto circuli portio ſemicirculo minor ABC, & contingant ipſam ad terminos baſis rectæ AD, CD, quæ conveniant in puncto D. Dico Portionem ABC minorem eſſe duabus tertiis trianguli ADC. Ducatur enim EF quæ portionem contingat in vertice B, & inſcribatur ipſi triangulum maximum ABC. Quum igitur triangulum EDF majus ſit dimidio trianguli ABC *. manifeſtum eſt ab illo partem abſcindi poſſe, ita ut reliquum tamen majus ſit dimidio dicti ABC trianguli. Sit igitur hoc pacto abſciſſum triangulum EDG. Et ducantur porro rectæ HI, KL, quæ portiones reliquas AMB, BNC in verticibus ſuis contingant, ipſiſque portionibus triangula maxima inſcribantur. Idemque prorſus circa reliquas portiones fieri intelligatur, donec tandem portiones reſiduæ ſimul minores ſint quam duplum trianguli EDG. Erit igitur inſcripta portioni figura quædam rectilinea, atque alia circumſcripta. Et quoniam triangulum EGF majus eſt dimidio trianguli ABC; & rurſus triangula HEI, KFL, majora quam dimidia triangulorum AMB, BNC; idque eadem ſemper ratione in reliquis locum habet, ut triangula ſuper portionem verticibus conſtituta, eorum quæ intra portiones ipſas deſcripta ſunt, majora ſint quam ſubdupla: apparet triangula omnia extra portionem poſita etiam abſque triangulo EGD majora ſimul eſſe quam dimidia triangulorum omnium intra portionem deſcriptorum. Atqui ſegmentorum in portione reliquorum triangulum quoque EGD majus eſt quam ſubduplum. Ergo triangulum EDF ſimul cum reliquis triangulis, quæ ſunt extra portionem, majus erit dimidio portionis totius ABC. Quare multo magis ſpatium à rectis AD, DC & arcu ABC comprehenſum majus erit portionis ABC dimidio. Ac proinde triangulum ADC majus quam portionis ABC ſeſquialterum. Quod erat demonſtrandum.

*per 2. huj.



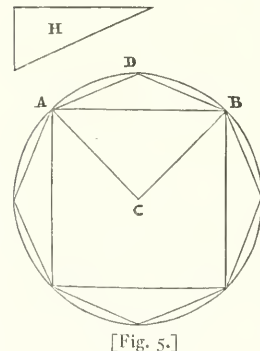
[Fig. 4.]

Théor. V. Prop. V.

Tout cercle eſt plus grand qu'un polygone à côtés égaux, qui lui eſt inſcrit, plus le tiers de la quantité dont ce polygone en ſurpaſſe un autre polygone inſcrit d'un nombre de côtés réduit à la moitié [5]).

Soit un cercle à centre C; et que lui ſoit inſcrit un polygone équilatéral, dont un des côtés ſoit AB. Et ſoit inſcrit de même un autre polygone, dont AB ſous-tend les deux côtés AD, DB. Ce dernier polygone eſt alors plus grand que le premier. Suppoſons que le tiers de l'excès ſoit égal à l'eſpace H. Je dis que le cercle eſt plus grand que le polygone ADB avec l'eſpace H. Traçons en effet à partir du centre les droites CA, CB. Comme alors le ſegment de cercle ADB eſt plus grand que les quatre tiers du triangle ADB qui lui eſt inſcrit*, les ſegments AD, DB feront enſemble plus grands que le tiers du triangle ADB. Pour cette raiſon auſſi le ſecteur CAB ſera plus grand que la ſomme du quadrilatère CADB et du tiers du triangle ADB. Mais, comme le ſecteur CAB au cercle entier, ainſi le quadrilatère CDBA eſt au polygone ADB, et ainſi auſſi le tiers du triangle ADB au tiers de l'excès du polygone ADB ſur le polygone AB. Il eſt donc clair qu' auſſi tout le cercle eſt plus grand que le polygone ADB augmenté du tiers de la quantité dont le polygone ADB ſurpaſſe le polygone AB, c'eſt-à-dire augmenté de l'eſpace H. Ce qu'il fallait démontrer.

* *d'après 3. ici.*



[Fig. 5.]

---

[5]) Soit donc s_n l'aire du polygone à n côtés, inscrit dans un cercle dont le rayon est égal à l'unité; on a alors d'après le théorème présent:

$$\pi > s_{2n} + \tfrac{1}{3}(s_{2n} - s_n).$$

Introduisant ensuite, au lieu des aires des polygones leurs périmètres p, on trouve à l'aide de la relation $s_{2n} = \frac{1}{2} p_n$, la formule:

$$2\pi > p_{2n} + \tfrac{1}{3}(p_{2n} - p_n),$$

Theor. V. Prop. V.

Omnis circulus major eſt polygono æqualium laterum ſibi inſcripto & triente exceſſus quo id polygonum ſuperat aliud inſcriptum ſubduplo laterum numero [5]).

Eſto circulus centro C [Fig. 5]; ſitque ipſi inſcriptum polygonum æqualium laterum, quorum unum ſit AB. Atque alterum item polygonum ſit inſcriptum, cujus bina latera AD, DB, ſubtendat AB. Hoc igitur priore polygono majus eſt. Sit autem exceſſus trienti æquale H ſpatium. Dico circulum majorem eſſe polygono ADB una cum ſpatio H. Ducantur enim ex centro rectæ CA, CB. Quoniam igitur portio circuli ADB major eſt quam ſeſquitertia trianguli ADB ſibi inſcripti*; erunt portiones AD, DB, ſimul majores triente trianguli ADB. *per.3.huj.* Quamobrem & ſector CAB major erit utriſque ſimul quadrilatero CADB & triente trianguli ADB. Sicut autem ſector CAB ad circulum totum, ita eſt quadrilaterum CDBA ad polygonum ADB, & ita quoque triens trianguli ADB ad trientem exceſſus polygoni ADB ſupra polygonum AB. Ergo manifeſtum eſt circulum quoque totum majorem fore polygono ADB unà cum triente exceſſus quo polygonum ADB ſuperat polygonum AB, hoc eſt, unà cum ſpatio H. Quod erat demonſtrandum.

---

qu'on peut comparer à la suite que nous avons déduite dans la note 7, p. 94 du Tome présent. On voit d'ailleurs qu' ici et dans le théorème suivant Huygens a atteint, pour ainsi dire d'un seul coup, une approximation qu'on ne pourrait certainement améliorer sans la rendre plus compliquée, et qui est du même ordre que celle, bien moins simple, de Snellius, que nous avons mentionnée dans la note 8, p. 95.

Théor. VI. Prop. VI.

Tout cercle eſt plus petit que les deux tiers du polygone à côtés égaux qui lui eſt circonſcrit, plus le tiers du polygone ſemblable inſcrit[6].

Soit donné un cercle dont le centre eſt A, et inſcrivons-y un polygone équilatéral, dont un des côtés ſoit BC; et circonſcrivons-y un autre ſemblable FEG, dont les côtés touchent le cercle aux ſommets des angles du premier polygone. Je dis que le cercle eſt plus petit que les deux tiers du polygone FEG, augmentés du tiers du polygone BC. Menons en effet à partir du centre les droites AB, AC. Comme alors le triangle BEC repoſe ſur la baſe du ſegment BDC et que ſes côtés touchent le ſegment, ce ſegment ſera moindre que les deux tiers du triangle
** d'après 4. ici.* BEC *. Ainſi lorſqu'on ajoute au triangle ABC deux tiers du triangle BEC, c'eſt-à-dire, deux tiers de l'excès du quadrilatère ABEC ſur le triangle ABC, l'eſpace formé par les deux ſera plus grand que le ſecteur de cercle ABC. Mais il revient au même, que l'on ajoute au triangle ABC les deux tiers du dit excès, ou que l'on ajoute les deux tiers du quadrilatère ABEC, et que l'on enlève par contre les deux tiers du triangle ABC: mais par ceci on obtient les deux tiers du quadrilatère ABEC avec le tiers du triangle ABC. Il paraît donc que le ſecteur ABC eſt moindre que les deux tiers du quadrilatère ABEC augmentés du tiers du triangle ABC. Par conſéquent, tout étant pris autant de fois que le ſecteur ABC eſt contenu dans le cercle, le cercle tout entier ſera plus petit que les deux tiers du polygone circonſcrit FEG et le tiers de l'inſcrit BC. Ce qu'il fallait démontrer.

---

[6]) On a donc

$$\pi < \tfrac{2}{3} S_n + \tfrac{1}{3} s_n,$$

où S_n et s_n représentent les aires des polygones circonscrit et inscrit au cercle dont le rayon est l'unité.

On en déduit aisément, en employant les relations $S_n = \frac{1}{2} P_{2n}$ et $s_{2n} = \frac{1}{2} p_n$,

$$2\pi < \tfrac{2}{3} P_{2n} + \tfrac{1}{3} p_n,$$

où P_n et p_n désignent respectivement les périmètres des mêmes polygones.

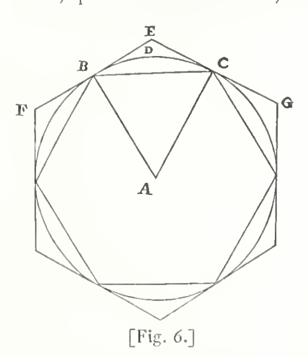
Ensuite, afin de pouvoir comparer cette formule à la suite (1) de la note 7, p. 94, nous

THEOR. VI. PROP. VI.

Omnis circulus minor eſt duabus tertiis polygoni æqualium laterum ſibi circumſcripti & triente polygoni ſimilis inſcripti [6]).

Eſto circulus cujus centrum A, & inſcribatur ipſi polygonum lateribus æqualibus, quorum unum ſit BC; & aliud ſimile circumſcribatur FEG, cujus latera circulum contingant ad occurſum angulorum polygoni prioris. Dico circulum minorem eſſe duabus tertiis polygoni FEG ſimul cum triente polygoni BC. Ducantur namque ex centro rectæ AB, AC. Igitur quoniam ſuper baſi portionis BDC conſiſtit triangulum BEC, cujus latera portionem contingunt, erit ipſa minor duabus tertiis trianguli BEC*. Itaque ſi triangulo ABC addantur duæ tertiæ trianguli BEC, hoc eſt, duæ tertiæ exceſſus quadrilateri ABEC ſupra triangulum ABC, ex utriſque compoſitum ſpatium majus erit ſectore circuli ABC. Idem eſt autem, ſive triangulo ABC addantur duæ tertiæ exceſſus dicti, ſive addantur duæ tertiæ quadrilateri ABEC, contraque auferantur duæ tertiæ trianguli ABC: hinc autem fiunt duæ tertiæ quadrilateri ABEC cum triente trianguli ABC. Ergo apparet ſectorem ABC minorem eſſe duabus tertiis quadrilateri ABEC & triente trianguli ABC. Quare ſumptis omnibus quoties ſector ABC circulo continetur, totus quoque circulus minor erit duabus tertiis polygoni circumſcripti FEG & triente inſcripti BC. Quod erat oſtendendum.

*per. 4. huj.



[Fig. 6.]

---

remplaçons P_{2n} par p_{2n}^2: $p_n = p_{2n} + (p_{2n} - p_n) . \frac{p_{2n}}{p_n} = p_{2n} + (p_{2n} - p_n) \left\{ 1 + \frac{p_{2n} - p_n}{p_n} \right\} =$
$= p_{2n} + (p_{2n} - p_n) + \frac{(p_{2n} - p_n)^2}{p_{2n}} . \frac{p_{2n}}{p_n} = p_{2n} + (p_{2n} - p_n) + \frac{(p_{2n} - p_n)^2}{p_{2n}} + \frac{(p_{2n} - p_n)^3}{p_n p_{2n}}$.

De cette façon on arrive à la formule

$$2\pi < p_{2n} + \tfrac{1}{3}(p_{2n} - p_n) + \tfrac{2}{3}\frac{(p_{2n} - p_n)^2}{p_{2n}} + \left[\tfrac{2}{3}\frac{(p_{2n} - p_n)^3}{p_n p_{2n}} \right],$$

mentionnée dans la note 22, p. 98 et qui montre que l'approximation est du même ordre que celle qui est obtenue par le théorème précédent, dont celui-ci forme la contrepartie.

Théor. VII. Prop. VII.

Toute circonférence de cercle est plus grande que le périmètre du polygone à côtés égaux qui lui est inscrit, plus le tiers de la quantité dont ce même périmètre surpasse le périmètre d'un autre polygone inscrit duquel le nombre des côtés est la moitié [7]).

Soit donné un cercle AB, à centre O, auquel est inscrit un polygone equilatéral ACD, et un autre, d'un nombre de côtés double AECBDF. Soit encore la droite GI égale au périmètre du polygone AECBDF, tandis que GH soit égale au périmètre du polygone ACD. La différence des deux périmètres est ainsi HI, dont le tiers IK soit ajouté à GI même. Je dis que la circonférence du cercle AB est plus grande que la droite GK entière. Inscrivons, en effet, au cercle un troisième polygone équilatère ALEMC, qui ait un nombre de côtés deux fois plus grand que le polygone AECBDF. Et sur les lignes GH, HI, IK construisons des triangles dont le sommet commun soit N, et la hauteur égale au demi-diamètre du cercle AB. Alors, puisque la base GH est égale au périmètre du polygone ACD, le triangle GNH sera égal au polygone qui a deux fois autant de côtés, c'est-à-dire, au polygone AECBDF. C'est ce qui paraît, quand on a tracé du centre les droites OA et OE, dont la dernière coupe AC en P. Car le triangle AEO est égal à un triangle ayant comme base AP et comme hauteur le rayon OE. Mais, la quantième partie le triangle AEO est du polygone AECBDF, la même partie est la droite AP du périmètre ACD. Ainsi le polygone AECBDF sera égal au triangle dont la base est égale au périmètre ACD, et la hauteur au rayon EO; c'est-à-dire au triangle GNH. Pour la même raison, puisque la base GI est égale au périmètre du polygone AECBDF et que la hauteur du triangle GNI est égale au rayon du cercle, le triangle GNI sera égal au polygone ALEMC. Par suite, le triangle HNI est égal à l'excès du polygone ALEMC sur le polygone AECBDF. Mais le triangle INK est par construction le tiers du triangle HNI. Il sera donc égal au tiers du dit excès. Ainsi tout le triangle GNK sera moindre que le cercle AB*. Mais la hauteur du triangle est égale au demi-diamètre du cercle. Il est donc évident que la droite GK est moindre que toute la circonférence du cercle. Ce qu'il fallait démontrer.

* *d'après 5. ici.*

Par là il est clair que, si des quatre tiers des côtés d'un polygone inscrit au cercle on retranche le tiers des côtés d'un autre polygone inscrit, d'un nombre de côtés égal à la moitié, le reste est plus petit que la circonférence. Car il revient au même, soit qu'on ajoute au plus grand périmètre $\frac{1}{3}$ de la quantité dont il surpasse

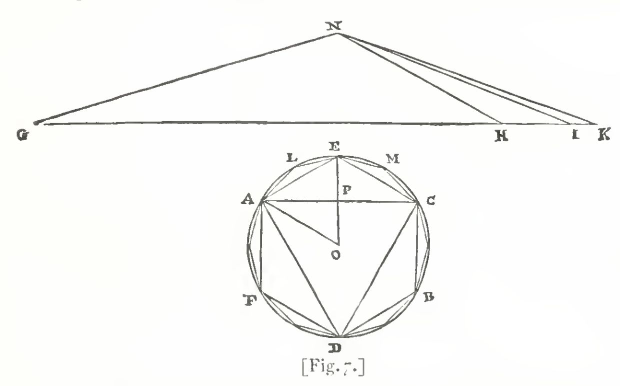
---

7) Voir la seconde formule de la note 5.

Theor. VII. Prop. VII.

Omnis circuli circumferentia major eſt perimetro polygoni æqualium laterum ſibi inſcripti, & triente exceſſus quo perimeter eadem ſuperat perimetrum alterius polygoni inſcripti ſubduplo laterum numero [7]).

Eſto circulus AB, centro O, cui inſcribatur polygonum æquilaterum ACD, atque alterum duplo laterum numero AECBDF. Sitque recta GI æqualis perimetro polygoni AECBDF, GH vero æqualis perimetro polygoni ACD. Exceſſus igitur perimetrorum eſt HI; cujus triens IK adjiciatur ipſi GI. Dico totâ GK majorem eſſe circuli AB circumferentiam. Inſcribatur enim circulo tertium polygonum æquilaterum ALEMC, quod ſit duplo numero laterum polygoni



[Fig. 7.]

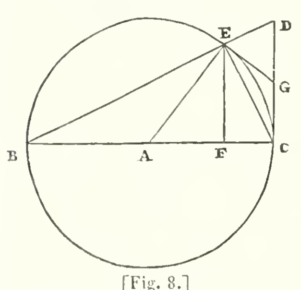
AECBDF. Et ſuper lineis GH, HI, IK, triangula conſtituantur quorum communis vertex N, altitudo autem æqualis ſemidiametro circuli AB. Igitur quoniam GH baſis æqualis eſt perimetro polygoni ACD, erit triangulum GNH æquale polygono cui bis totidem ſunt latera, hoc eſt, polygono AECBDF. Hoc enim patet, ductis ex centro rectis OA & OE, quarum hæc ſecet AC in P. Nam triangulum quidem AEO æquale eſt triangulo baſin habenti AP & altitudinem radii OE. Quanta autem pars eſt triangulum AEO polygoni AECBDF, eadem eſt recta AP perimetri ACD. Itaque polygonum AECBDF æquabitur triangulo cujus baſis æqualis perimetro ACD, altitudo autem radio EO: hoc eſt, triangulo GNH. Eâdem ratione, quoniam baſis GI eſt æqualis polygoni AECBDF perimetro, & altitudo trianguli GNI æqualis radio circuli, erit triangulum GNI æquale polygono ALEMC. Itaque triangulum HNI æquale exceſſui polygoni ALEMC ſupra polygonum AECBDF. Trianguli autem HNI ſubtriplum eſt ex conſtr. triangulum INK. Ergo hoc æquale erit dicti exceſſus trienti. Quare totum trian

le plus petit périmètre, foit qu'on ajoute $\frac{1}{3}$ du plus grand périmètre et que par contre on enlève $\frac{1}{3}$ du plus petit périmètre. Mais par là on obtient les quatre tiers du plus grand périmètre moins le tiers du plus petit. Ainfi, lorfque de feize côtés du dodécagone inferit on déduit deux côtés de l'hexagone inferit, c'eft-à-dire le diamètre du cercle, la longueur reftante fera moindre que la circonférence du cercle, ou bien, fi l'on retranche le rayon de huit côtés du dodécagone, le refte fera moindre que la moitié de la circonférence. Or, ceci eft utile pour une conftruction mécanique, parce que la différence eft petite, ainfi que je le montrerai plus loin [8]).

Il eft clair auffi que, pour tout arc qui eft moindre que la demi-circonférence, fi à la corde fous-tendue on ajoute le tiers de la quantité dont la corde excède le finus, la ligne compofée eft plus petite que l'arc.

Théor. VIII. Prop. VIII.

Un cercle étant donné, fi à l'extrémité du diamètre on mène une tangente, et que l'on tire auffi de l'extrémité opposée du diamètre une droite qui coupe la circonférence et rencontre la tangente menée: les deux tiers de la tangente interceptée avec le tiers de la droite qui, à partir du point d'interfection, tombe à angles droits fur le diamètre, feront enfemble plus grands que l'arc découpé adjacent [9]).



[Fig. 8.]

Soit donné un cercle de centre A et à diamètre BC; et foit menée à partir de C une droite CD qui touche le cercle: fuppofons qu'il y aboutiffe une droite BD, tirée à partir de l'autre extrémité du diamètre, et qu'elle coupe la circonférence en E: et foit EF perpendiculaire au diamètre BC. Je dis que les deux tiers de la tangente interceptée CD, enfemble avec le tiers de cette droite EF, font plus grands que l'arc EC. Joignons en effet AE, EC; et menons une tangente au cercle au point E, qui rencontre la tangente CD en G. Ainfi GE fera égal à GC, et auffi à DG; car fi avec G comme centre on décrit une circonférence qui paffe par les points C, E, elle paffera auffi par le point D, puifque l'angle CED eft droit. Or nous avons montré ci-deffus, que les deux tiers du quadrilatère AEGC,
*d'après 6. ici. enfemble avec le tiers du triangle AEC, font plus grands que le fecteur AEC *. Et le quadrilatère AEGC eft égal au triangle ayant comme bafe le double de CG,

[8]) Voir le „Problema II. Prop. XI", p. 143 du Tome présent.

[9]) Le but de ce théorème est surtout de préparer celui qui suit. Toutefois il est clair qu'il mène plus directement au suivant: *Toute circonférence de cercle est plus petite que les deux tiers du*

gulum GNK minus erit circulo AB*. Altitudo autem trianguli æqualis eſt circuli ſemidiametro. Ergo evidens eſt rectam GK totâ circuli circumferentiâ minorem eſſe. Quod erat oſtendendum. *per.5.huj.

Hinc manifeſtum eſt, ſi à ſeſquitertio laterum polygoni circulo inſcripti auferatur triens laterum polygoni alterius inſcripti ſubduplo laterum numero, reliquum circumferentiâ minus eſſe. Idem enim eſt, ſive perimetro majori addatur $\frac{1}{3}$ exceſſus quo ipſa ſuperat perimetrum minorem, ſive addatur $\frac{1}{3}$ perimetri majoris contraque auferatur $\frac{1}{3}$ perimetri minoris. Hinc autem fit ſeſquitertium majoris perimetri minùs triente minoris. Quare ſi à ſexdecim inſcripti dodecagoni lateribus duo latera inſcripti hexagoni, hoc eſt, diameter circuli deducatur, reliqua circuli circumferentiâ minor erit aut ſi ab octo dodecagoni lateribus radius deducatur, reliqua minor erit circumferentiæ ſemiſſe. Hoc autem ad conſtructionem mechanicam utile eſt, quoniam exigua eſt differentia, ſicut poſtea oſtendetur [8]).

Manifeſtum etiam, in omni arcu qui ſemicircumferentiâ minor ſit, ſi ad ſubtenſam addatur triens exceſſus quo ſubtenſa ſinum ſuperat, compoſitam arcu minorem eſſe.

Theor. VIII. Prop. VIII.

Circulo dato, ſi ad diametri terminum contingens ducatur, ducatur autem & ab oppoſito diametri termino quæ circumferentiam ſecet occurratque tangenti ductæ: erunt interceptæ tangentis duæ tertiæ cum triente ejus quæ ab interſectionis puncto diametro ad angulos rectos incidet, ſimul arcu abſciſſo adjacente majores [9]).

Eſto circulus [Fig. 8] centro A, diametro BC; & ducatur ex C recta quæ circulum contingat CD: huic autem occurrat ducta ab altero diametri termino recta BD, quæ circumferentiam ſecet in E: ſitque EF diametro BC ad angulos rectos. Dico tangentis interceptæ CD duas tertias ſimul cum triente ipſius EF, arcu EC majores eſſe. Jungantur enim AE, EC; & ducatur tangens circulum in E puncto, quæ tangenti CD occurrat in G. Erit igitur GE ipſi GC æqualis, itemque DG; nam ſi centro G circumferentia deſcribatur quæ tranſeat per puncta C, E, eadem tranſibit quoque per D punctum, quoniam angulus CED rectus eſt. Oſtenſum autem fuit ſuprà, duas tertias quadrilateri AEGC unà cum triente trianguli AEC ſimul majores eſſe ſectore AEC*. Eſtque quadrilaterum AEGC æquale triangulo *per.6.huj. baſin habenti duplam CG, hoc eſt, CD: & altitudinem CA, triangulum verò

---

périmètre d'un polygone à côtés égaux, qui lui est circonscrit, plus le tiers du périmètre du poiygone inscrit dont le nombre des côtés est la moitié.

Mais il est probable que ce théorème, qu'on trouve exprimé par la seconde formule de la note 6 et qui est donc l'équivalent du „Theor. VI", a été considéré par Huygens comme moins élégant et moins pratique que le „Theor. IX", qu'il fait suivre, et dont, de plus, l'approximation est un peu meilleure.

c'eſt-à-dire, CD, et comme hauteur CA: mais le triangle AEC eſt égal au triangle ayant une baſe égale à cette EF et la dite hauteur AC. Ainſi il eſt clair que les deux tiers du quadrilatère AEGC, augmentés du tiers du triangle AEC, ſont égaux au triangle qui a pour baſe une droite compoſée des deux tiers de CD et du tiers de EF, et dont la hauteur eſt le rayon AC. C'eſt pourquoi auſſi le triangle ſera plus grand que le ſecteur AEC. Il réſulte de là que ſa baſe, c'eſt-à-dire, la droite formée des deux tiers de CD et du tiers de EF, eſt plus grande que l'arc CE. Ce qu'il fallait démontrer.

Théor. IX. Prop. IX.

Toute circonférence de cercle eſt plus petite que les deux tiers du périmètre d'un polygone à côtés égaux qui lui eſt inſcrit plus le tiers du périmètre du polygone ſemblable circonſcrit [10]).

Soit donné un cercle dont le centre eſt A; et inſcrivons-y un polygone équilatéral, dont le côté eſt CD: et circonſcrivons-y un autre ſemblable, à côtés parallèles à ceux du premier, deſquels un ſoit EF. Je dis que la circonférence de tout le cercle eſt plus petite que les deux tiers du contour du polygone CD plus le tiers du contour du polygone EF. Menons en effet le diamètre du cercle BG, qui diviſe à la fois au milieu le côté CD du polygone inſcrit en H et le côté EF du circonſcrit en G (car évidemment G eſt le point de contact du côté EF). Et prenons HL égal à HG et joignons AC, BC et prolongeons-les; et ſuppoſons que BC rencontre le côté EF en K, tandis que la droite AC prolongée atteint en E l'angle du polygone circonſcrit. Puiſque ainſi HL eſt égal à HG, BL ſera le double de AH: et par conſéquent comme GA à AH ainſi GB eſt à BL. Mais le rapport de HB à BL eſt plus grand que celui de GB à BH; puiſque les trois lignes GB, HB, LB s'excèdent mutuellement de la même quantité. Et ainſi le rapport de GB à BL, c'eſt-à-dire, de GA à AH, ſera plus grand que le

---

[10]) A l'aide des notations de la note 6, p. 130, le théorème s'exprime par la formule:

$$2\pi < \tfrac{1}{3} P_n + \tfrac{2}{3} p_n,$$

qu'on peut écrire:

$$2\pi < \tfrac{1}{3} P_{2n} + \tfrac{2}{3} p_{2n} = p_{2n} + \tfrac{1}{3}(p_{2n} - p_n) + \tfrac{1}{3}\frac{(p_{2n} - p_n)^2}{p_{2n}} + \left[\tfrac{1}{3}\frac{(p_{2n} - p_n)^3}{p_n\, p_{2n}}\right].$$

Pour arriver à ce théorème, en partant de celui que nous avons énoncé dans la note précédente, il suffira de prouver qu'on a:

$$\tfrac{1}{3} P_n + \tfrac{2}{3} p_n > \tfrac{2}{3} P_{2n} + \tfrac{1}{3} p_n,$$

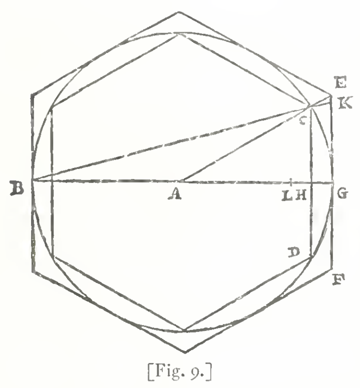
ou bien, en introduisant les côtés A_n et a_n des polygones circonscrits et inscrits,

$$\tfrac{1}{3} A_n + \tfrac{2}{3} a_n > \tfrac{4}{3} A_{2n} + \tfrac{1}{3} a_n,$$

AEC æquale triangulo baſin ipſi EF æqualem habenti & altitudinem dictam AC. Itaque apparet duas tertias quadrilateri AEGC ſimul cum triente trianguli AEC æquari triangulo qui baſin habeat compoſitam ex duabus tertiis CD & triente EF, altitudinum verò radii AC. Quare ejusmodi quoque triangulum majus erit ſectore AEC. Unde liquet baſin ipſius, hoc eſt, compoſitam ex duabus tertiis ipſius CD & triente ipſius EF, majorem eſſe arcu CE. Quod erat demonſtrandum.

Theor. IX. Prop. IX.

Omnis circuli circumferentia minor eſt duabus tertiis perimetri polygoni æqualium laterum ſibi inſcripti & triente perimetri polygoni ſimilis circumſcripti [10]).



[Fig. 9.]

Eſto Circulus cujus A centrum; & inſcribatur ei polygonum æquilaterum, cujus latus CD: ſimileque aliud circumſcribatur lateribus ad priora parallelis, quorum unum ſit EF. Dico circuli totius circumferentiam minorem eſſe duabus tertiis ambitus polygoni CD & triente ambitus polygoni EF. Ducatur namque diameter circuli BG, quæ ſimul inſcripti polygoni latus CD medium dividat in H, & circumſcripti latus EF in G, (conſtat autem G fore punctum contactus lateris EF,) Et ponatur HL æqualis ipſi HG, & jungantur AC, BC & producantur, occurratque BC lateri EF in K, producta autem AC incidet in E angulum polygoni circumſcripti. Quoniam igitur HL æqualis HG, erit BL dupla ipſius AH: Ideoque ut GA ad AL, ita GB ad BL. Major autem eſt ratio HB ad BL, quam GB ad BH; quoniam hæ tres ſeſe æqualiter excedunt GB, HB, LB. Itaque major erit ratio GB ad BL, hoc eſt, GA ad AH, quam duplicata rationis GB ad BH. Sicut autem GA ad

c'est-à-dire, $A_n + a_n > 4\,A_{2n}$, ou enfin (voir la figure 9) EG + CH > 2 KG; puisque EG $= \frac{1}{2} A_n$; CH $= \frac{1}{2} a_n$; KG = DC de la fig. 8 $= A_{2n}$.

C'est là, en effet, le but des considérations géométriques qui vont suivre, et qui auraient pu être beaucoup abrégées à l'aide de la remarque que nous ferons dans la note 11.

carré du rapport de GB à BH. Or, comme GA à AH, ainſi EG eſt à CH; et comme GB à BH, ainſi KG eſt à CH. Par conſéquent, le rapport de EG à CH ſera plus grand que le carré de celui de KG à CH. Pour cette raiſon le rapport de EG à KG eſt plus grand que celui de KG à CH. Par ſuite les deux lignes EG, CH ſont certainement enſemble plus grandes que le double de KG [11]). Et en prenant les tiers de toutes les lignes, les tiers des deux EG et CH feront enſemble plus grands que les deux tiers de KG. Pour cette raiſon, ſi l'on ajoute de part et d'autre le tiers de CH, le tiers de EG avec les deux tiers de CH ſera plus grand que les deux tiers de KG avec le tiers de CH. Mais l'arc CG eſt encore plus petit que ceux-ci *. Donc, les deux tiers de CH, enſemble avec le tiers de EG, ſont à plus forte raiſon plus grands que ce même arc CG. Si donc nous prenons toutes les grandeurs autant de fois que l'arc CG eſt contenu dans la circonférence entière, les deux tiers du périmètre du polygone CD, plus le tiers du périmètre du polygone EF, feront auſſi plus grands que la circonférence du cercle entier. Ce qu'il fallait démontrer.

** d'après ce qui précède.*

Ainſi donc, tout arc de circonférence plus petit qu'un quadrant eſt plus petit que les deux tiers de ſon ſinus plus le tiers de ſa tangente.

Problème I. Prop. X.

Trouver le rapport de la périphérie au diamètre, auſſi proche que l'on veut du vrai.

Archimède prouva [12]), par les polygones inſcrit et circonſcrit de 96 côtés, que le rapport de la périphérie au diamètre eſt moindre que le triple et un ſeptième, mais plus grande que $3\frac{10}{71}$. Mais nous allons démontrer ici la même choſe au moyen du dodécagone.

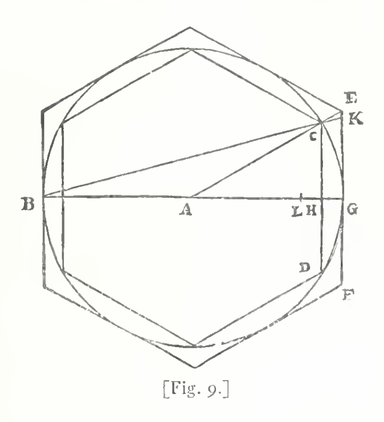
En effet, puiſque le côté du dodécagone inſcrit au cercle eſt plus grand que $5176\frac{3}{8}$ des parties dont le rayon en contient 10000: la ſomme de douze côtés, c'eſt-à-dire, le périmètre du dodécagone inſcrit, ſera de même plus grand que $62116\frac{1}{2}$: mais le périmètre de l'hexagone inſcrit eſt le ſextuple du rayon, et ſe compoſe par conſéquent de 60000 parties. Ainſi donc le périmètre du dodécagone excède le périmètre de l'hexagone de plus que $2116\frac{1}{2}$ parties. Le tiers de l'excès ſera donc plus grand que $705\frac{1}{2}$. De ſorte que le périmètre du dodécagone, enſemble avec le tiers de la quantité dont il excède le périmètre de l'hexagone, ſera plus grand que la ſomme de $62116\frac{1}{2}$ et $705\frac{1}{2}$ parties, c'eſt-à-dire, que 62822 parties. Et par conſéquent la périphérie du cercle ſera à plus forte raiſon plus grande que cela *. Mais le rapport de 62822 à 20000, la longueur du diamètre, eſt plus

** d'après 7. ici.*

[11]) Ce résultat aurait pu être atteint bien plus facilement en abaissant une perpendiculaire CM sur EG. Alors CK est la bissectrice de l'angle ECM et on a par suite EK > KM, c'est-à-dire: $EG - KG > KG - CH$; donc $EG + CH > 2\,KG$.

[12]) Au lieu cité dans la note 1, p. 93 du Tome présent.

AH, ita eſt EG ad CH; & ſicut GB ad BH, ita KG ad CH. Ergo major erit ratio EG ad CH, quàm duplicata ejus, quam habet KG ad CH. Quare major ratio EG ad KG, quam KG ad CH. Ideoque duæ ſimul EG, CH omnino majores duplâ KG [11]). Et ſumptis omnium trientibus, erunt trientes utriuſque EG & CH ſimul majores duabus tertiis KG. Quamobrem addito utrimque ipſius CH triente, erit triens EG cum duabus tertiis CH, major duabus tertiis KG cum triente CH. Hiſce verò minor etiam eſt arcus CG *. Igitur duæ tertiæ CH ſimul cum triente ipſius EG majores omnino ſunt eodem arcu CG. Unde ſumptis omnibus toties quoties arcus CG circumferentiâ totâ continetur, erunt quoque duæ tertiæ perimetri polygoni CD, cum triente perimetri polygoni EF, majores circuli totius circumferentiâ. Quod fuerat oſtendendum. * *per præced.*



[Fig. 9.]

Omnis igitur circumferentiæ arcus quadrante minor, minor eſt ſinus ſui beſſe & tangentis triente.

Problema I. Prop. X.

Peripheriæ ad diametrum rationem invenire quamlibet veræ propinquam.

Minorem eſſe peripheriæ ad diametrum rationem quam triplam ſeſquiſeptimam: majorem verò quam $3\frac{10}{71}$, Archimedes oſtendit [12]) inſcripto circumſcriptoque 96 laterum polygono. Idem verò hic per dodecagona demonſtrabimus.

Quia enim latus inſcripti circulo dodecagoni majus eſt partibus $5176\frac{3}{8}$, qualium radius continet 10000: duodecim latera proinde, hoc eſt, perimeter inſcripti dodecagoni major erit quam $62116\frac{1}{2}$: perimeter autem hexagoni inſcripti eſt radii ſextupla, ideoque partium 60000. Igitur dodecagoni perimeter perimetrum hexagoni excedit ampliùs quam partibus $2116\frac{1}{2}$. Quare triens exceſſus major erit quam $705\frac{1}{2}$. Igitur dodecagoni perimeter unà cum triente exceſſus, quo perimetrum hexagoni ſuperat, major erit aggregato partium $62116\frac{1}{2}$ & $705\frac{1}{2}$, hoc eſt, partibus 62822. Atque hiſce proinde omninò major erit circuli peripheria*. Eſt autem major ratio 62822 ad 20000, longitudinem diametri, * *per. 7. huj.*

grand que celui de $3\frac{10}{71}$ à 1. Le rapport de la périphérie au diamètre sera donc à plus forte raison aussi plus grand.

D'autre part, puisque le côté du dodécagone inscrit est plus petit que $5176\frac{2}{5}$ parties, huit côtés, c'est-à-dire $\frac{2}{3}$ du périmètre, feront moindres que $41411\frac{1}{5}$. De même, puisque le côté du dodécagone circonscrit est plus petit que 5359, quatre côtés, c'est-à-dire, le tiers du périmètre, feront moindres que 21436. Pour cette raison, $\frac{2}{3}$ du périmètre du dodécagone inscrit plus le tiers du périmètre du circonscrit feront moindres que $62847\frac{1}{5}$. Mais la circonférence de cercle est aussi plus petite que cette somme*. Cette circonférence sera donc à plus forte raison au diamètre dans un rapport moindre que $62847\frac{1}{5}$ à 20000; et bien moindre par conséquent que $62857\frac{1}{7}$ à 20000, ce qui est le triple et un septième. Et ainsi sont démontrées les limites du rapport de la périphérie au diamètre qu' Archimède établit. Mais nous les démontrerons dans la suite [13]) en nous servant du côté du seul triangle équilatéral inscrit. Ensuite, pour trouver un rapport plus approché il faudra considérer des polygones d'un plus grand nombre de côtés. Ainsi figurons nous que nous ayons circonscrit au cercle un polygone de 60 côtés et que nous en ayons inscrit un autre. Et qu'en outre soit inscrit un polygone d'un nombre de côtés égal à la moitié, savoir celui de trente côtés.

* *d'après 9. ici.*

Or, on trouve que le côté du polygone à soixante côtés inscrit est plus grand que 10467191 parties dont le rayon en contient 100000000 et le côté du polygone à trente côtés plus petit que 20905693 parties: dont la moitié $10452846\frac{1}{2}$ est le sinus de l'arc égal à $\frac{1}{60}$ de la circonférence. Mais la corde sous-tendue était 10467191. Donc la différence est $14344\frac{1}{2}$, moindre que la vraie: et le tiers de la différence est $4781\frac{1}{2}$, ce qui, ajouté à la sous-tendue 10467191, fait $10471972\frac{1}{2}$. De sorte que l'arc de $\frac{1}{60}$ de la circonférence est plus grand que ce nombre de parties. Mais en le comptant 60 fois on obtient 628318350. Par conséquent la circonférence entière est à plus forte raison plus grande que ce nombre de parties.

Et puis, comme le côté du polygone inscrit à 60 angles est plus petit que 10467192, les deux tiers de celui-ci feront moindres que 6978128. Mais comme le côté du polygone circonscrit de 60 angles est plus petit que 10481556, le tiers de celui-ci sera plus petit que 3493852. Ce qui ajouté à 6978128 fait 10471980. Ce nombre de parties surpasse donc certainement $\frac{1}{60}$ de la circonférence, et le soixantuple de celles-là, c'est-à-dire, 628318800, sera plus grand que la circonférence toute entière. Mais employons encore des polygones de 10800 côtés, dont d'une part le côté de l'inscrit, qui est sous-tendu par un arc de deux minutes, a été trouvé, d'après le calcul de Ludolphe de Cologne, un arithméticien distingué, se composer de 58177640912684919 parties et pas une de plus, tandis que le côté du polygone circonscrit est de 58177643374063182 parties et pas une de moins. Et en outre le côté du polygone inscrit dont le nombre des côtés est la moitié, est de 116355276902613523 parties et pas une de moins [14]). On déduit de

quam $3\frac{10}{71}$ ad 1. Ergo omnino etiam peripheriæ ad diametrum ratio major erit.

Rurſus quoniam latus dodecagoni inſcripti minus eſt partibus $5176\frac{2}{5}$. Erunt octo latera, hoc eſt, $\frac{2}{3}$ perimetri minora quam $41411\frac{1}{5}$. Item quia latus dodecagoni circumſcripti minus eſt quam 5359, erunt quatuor latera, hoc eſt, triens perimetri minor quam 21436. Quamobrem $\frac{2}{3}$ perimetri dodecagoni inſcripti cum triente perimetri circumſcripti minores erunt quam $62847\frac{1}{5}$. Sed iſtis ſimul minor etiam eſt circuli circumferentia *. Ergo hæc ad diametrum omnino minorem habebit rationem, quam $62847\frac{1}{5}$ ad 20000; & multo minorem proinde, quam $62857\frac{1}{7}$ ad 20000, hoc eſt, quam triplam ſeſquiſeptimam. Demonſtrati itaque ſunt termini Rationis peripheriæ ad diametrum, quos Archimedes ſtatuit. Eoſdem verò poſtmodum ſolius inſcripti trigoni æquilateri latere indagato comprobabimus [13]). Porrò ut propinquior inveniatur ratio plurium laterum polygona conſideranda ſunt. Intelligatur igitur circumſcriptum circulo polygonum aliudque inſcriptum laterum 60. Et præter hæc ſubduplo numero laterum inſcriptum, nempe trigintangulum.

*per. 9. huj.

Et invenitur quidem latus inſcripti ſexagintanguli majus partibus 10467191, qualium radius 100000000 & latus trigintanguli minus quam 20905693: cujus dimidium $10452846\frac{1}{2}$ eſt ſinus arcus æquantis $\frac{1}{60}$ circumferentiæ. Subtenſa autem erat 10467191. Ergo differentia $14344\frac{1}{2}$ minor verâ: & triens differentiæ $4781\frac{1}{2}$, qui additus ad ſubtenſam 10467191 facit $10471972\frac{1}{2}$. Quibus itaque major eſt arcus $\frac{1}{60}$ circumferentiæ. Ductis autem $10471972\frac{1}{2}$ ſexagies ſiunt 628318350. Hiſce igitur partibus omnino major eſt circumferentia tota.

Rurſus quoniam latus inſcripti 60 anguli minus eſt quam 10467192, erunt duæ tertiæ ipſius minores quam 6978128. Circumſcripti autem 60 anguli latus cum ſit minus quam 10481556, erit triens ipſius minor quam 3493852. Quibus additis ad 6978128, ſiunt 10471980. Hæ igitur omnino excedunt $\frac{1}{60}$ circumferentiæ, & ſexagecuplum ipſarum, hoc eſt 628318800 majus erit circumſerentiâ totâ. Quod ſi verò polygona adhibeamus laterum 10800, quorum inſcripti quidem latus, calculo Ludolphi Colonienſis, Arithmetici nobilis, inventum eſt partium 5817764091268491 non unâ amplius, ſubtenditurque duobus ſcrup. primis; circumſcripti autem latus 5817764337406318 non unâ minus. Prætereaque latus polygoni ſubduplo laterum numero inſcripti, quod eſt 11635527690261352 non unâ minus [14]). Hinc peripheriæ longitudo invenitur major quam partium

[13]) Voir le „Problema IV. Propos. XX", p. 173.

[14]) Les côtés des polygones de 10800 et 5400 côtés, c'est-à-dire, les cordes des arcs de 2′ et de 4′, Huygens pouvait les emprunter à une petite table des cordes de 1′ à 12′ qui les donne avec encore quatre chiffres en plus et qu'on trouve au folio 21 de l'ouvrage de Ludolphe de Cologne, mentionné en premier lieu dans la note 3, p. 93 du Tome présent.

Le côté du polygone circonscrit devait être calculé par la formule $A_n = 2a_n r : \sqrt{4r^2 - a_n^2}$; mais ce calcul était beaucoup simplifié par ce que la table en question contient aussi les cordes complémentaires, c'est-à-dire, les valeurs de $\sqrt{4r^2 - a_n^2}$. Ainsi, pour trouver A_{10800}, Huygens n'avait qu' à multiplier a_{10800} par la fraction: $\frac{20000000000000000000\ldots}{1999999915384050 65\ldots}$.

là que la longueur de la périphérie eſt plus grande que 6283185307179584 parties et plus petite que 6283185307179589, dont le rayon en a 1000000000000000. Or, par la méthode habituelle de l'addition des côtés de ces polygones inſcrit et circonſcrit on trouverait ſeulement que la périphérie eſt plus grande que 62831852 parties, et plus petite que 62831855. On voit donc que nous avons trouvé un nombre de chiffres vrais plus grand que le double. Mais il en eſt de même auſſi dans ce qui précède, et doit toujours arriver quel que ſoit le nombre de côtés des polygones dont nous faiſons uſage. Et par les propoſitions que nous donnerons dans la ſuite, on verra qu'on peut facilement obtenir un nombre de chiffres trois fois plus grand [15]).

Problème II. Prop. XI.

Prendre une droite égale à la périphérie d'un cercle donné.

Nous avons montré ci-deſſus [16]) que huit côtés du dodécagone inſcrit, diminués du rayon du cercle, ſont plus petits que la demi-périphérie. Mais dans une conſtruction, la différence ne peut pas être aperçue dans la plupart des cas. Car ſi l'on ajoute la quatre-millième partie du diamètre à la longueur ainſi trouvée, elle dépaſſera déjà la demi-périphérie. C'eſt ce que l'on reconnaît comme il ſuit. Des parties dont le rayon en a 10000, le côté du dodécagone inſcrit dans le cercle en contient plus que $5176\frac{3}{8}$. De ſorte que huit côtés ſont plus grands que 41411, et retranchant le rayon 10000, le reſte ſera plus grand que 31411; ſi l'on ajoute à cela 5 parties, ce qui eſt $\frac{1}{4000}$ du diamètre, on trouve déjà 31416; et il réſulte de ce qui précède que la moitié de la circonférence eſt plus petite que ce nombre de parties. Or, le côté du dodécagone inſcrit s'obtient facilement, puiſque le rayon ſous-tend un ſextant de la périphérie. Et ce rapport eſt plus précis que ſi nous faiſons uſage du triple et un ſeptième. Car ſuivant ce dernier rapport la longueur dépaſſe la $\frac{1}{2}$ [17]) périphérie de plus de $\frac{1}{1000}$ du diamètre.

---

[15]) Soit k le nombre des chiffres fourni par la méthode d'Archimède, appliquée aux polygones de $2n$ côtés, alors, en posant le rayon du cercle égal à l'unité, on aura:

$$P_{2n} - p_{2n} = \frac{p_{2n}^2}{p_n} - p_{2n} = \frac{p_{2n}}{p_n}(p_{2n} - p_n) = a\ 10^{-k+1},\ \text{où}\ a < 1;$$

donc, certainement:

$$p_{2n} - p_n < a\ 10^{-k+1}.$$

Or, la différence des limites respectives, données par les Théorèmes VII et IX est égale à

$$\frac{1}{3}\ \frac{(p_{2n} - p_n)^2}{p_n}.$$

Elle sera donc plus petite que $\frac{10}{3p_n}a^2 10^{-2k+1}$.

On connaîtra donc, *généralement parlant*, le nombre 2π, à l'aide de ces limites, jusqu'en $2k$

62831853071795 84; minor autem quam 62831853071795 89, qualium radius 10000000000000000. Solitâ autem methodo ex additis inſcripti circumſcriptique polygoni iſtius lateribus, invenietur tantùm majorem eſſe peripheriam partibus 62831852, & minorem 62831855. Patet igitur notarum verarum ampliùs quam duplum numerum eſſe à nobis inventum. Hoc autem & in præcedentibus ita ſe habet, ſemperque evenire neceſſe eſt quotcunque laterum polygonis utamur. At per ea, quae poſtea trademus, triplum numerum notarum facilè obteneri apparebit [15]).

Problema II. Prop. XI.

Rectam ſumere peripheriæ dati circuli æqualem.

Oſtenſum eſt ſuperius [16]), quod octo inſcripti dodecagoni latera dempto circuli radio minora ſunt peripheriâ dimidiâ. In conſtructione autem ut plurimum defectus animadverti nequit. Nam ſi quatermilleſima diametri pars accedat longitudini ſic inventæ, jam dimidiam peripheriam excedet. Quod ſic fiet manifeſtum. Quarum partium radius eſt 10000, earum latus dodecagoni inſcripti circulo eſt amplius quam $5176\frac{3}{8}$. Unde latera octo majora quam 41411. & dempto radio 10000, erit reliqua major quam 31411. cui ſi addantur partes 5, hoc eſt, $\frac{1}{4000}$ diametri, fient jam 31416; quibus minorem eſſe circumferentiam dimidiam liquet ex præcedentibus. Latus autem dodecagoni inſcripti facilè invenitur, quia radius peripheriæ ſextantem ſubtendit. Eſtque hæc ratio accuratior quam ſi triplâ ſeſquiſeptimâ utamur. Nam ſecundùm eam excedetur $\frac{1}{2}$ [17]) peripheriæ longitudo ampliùs quam $\frac{1}{1000}$ diametri.

---

chiffres au moins; mais comme a^2 sera souvent considérablement moins que l'unité, le nombre des chiffres connus pourra excéder facilement le nombre $2k$ d'une et quelquefois de deux unités, et de plus encore.

Plus loin, au „Problema IV", Huygens emploie des limites dont la différence est à peu près égale à $\left(\frac{2}{25}-\frac{22}{675}\right)(p_{2n}-p_n)^3 : 4\pi^2 = \frac{8}{675\pi^2}(p_{2n}-p_n)^3 < \frac{32}{27\pi^2}\, a^3\, 10^{-3k+1}$ et on trouvera donc alors, *en général*, $3k$ chiffres et plus, au moyen de ces nouvelles limites.

L'assertion de Huygens est donc juste, si l'on excepte les cas très spéciaux où une légère différence excerce une influence anormale sur le nombre des chiffres connus.

Nous ne savons pas, d'ailleurs, précisément comment Huygens y est parvenu; mais il semble probable qu'en cherchant la différence des limites, il a remarqué qu'elle dépendait respectivement du carré et du cube de l'expression $p_{2n}-p_n$; ce qui, de plus, a pu lui suggérer la comparaison avec le nombre des chiffres du carré et du cube d'un nombre donné, laquelle on rencontre dans la préface à la p. 117 du Tome présent.

[16]) Voir l'avant-dernier alinéa de la démonstration du „Theor. VII. Prop. VII", p. 135.

[17]) Le nombre $\frac{1}{2}$ a été interpolé à la plume dans l'exemplaire de Huygens, que nous possédons.

Autrement.

Soit donné un cercle dont BC eſt le diamètre. Diviſons la demi-circonférence BC en deux parties égales au point D, et le reſte en trois parties égales en E et F. Et joignons DE, DF, qui coupent le diamètre en G et H. Alors l'un des côtés du triangle GDH, ajouté à la baſe GH, ſera un tout petit peu plus grand que le quadrant BD, et ne le dépaſſera même pas de $\frac{1}{5000}$ du diamètre BC. Il faut ſavoir, en effet, que DG ou DH ſont égaux á deux côtés du dodécagone inſerit [18]), tandis que GH eſt égal au côté du dodécagone circonſcrit [19]). D'où il réſulte que la ſomme de DG et GH eſt plus grande que le quadrant BD. Car, comme d'après la Prop. 8 [20]) huit côtés du dodécagone inſcrit dans le cercle avec quatre côtés du circonſcrit ſont plus grands que la périphérie toute entière, pour cette raiſon, en prenant la quatrième partie du tout, deux côtés de l'inſerit avec un ſeul côté du circonſerit ſeront auſſi plus grands que le quart de la périphérie. Enſuite, puiſque le côté du dodécagone inſerit eſt plus petit que 51764 parties dont BC en a 200000, deux côtés, c'eſt-à-dire GD, ſeront moindres que 103528. Mais le côté du dodécagone circonſcrit eſt plus petit que 53590 parties, donc auſſi la droite GH. Par conſéquent les droites DG et GH réunies ſont moins que 157118. Mais, d'après ce qui précède, on ſait que le quadrant BD eſt plus grand que 157079. La différence eſt donc plus petite que 39 parties, alors que 40 ne font que $\frac{1}{5000}$ du diamètre BC.

Autrement [21]).

Ajoutons à trois demi-diamètres $\frac{1}{10}$ du côté du carré inſcrit; la droite ainſi composée égalera la demi-circonférence de ſi près, qu'elle n'eſt pas plus courte que $\frac{1}{18000}$ [22]) du diamètre. Le côté du carré eſt plus grand que 141421 parties dont le rayon en a 100000, d'où ce qui vient d'être dit ſe démontre aiſément.

Ou plutôt on ajoutera à ſix demi-diamètres $\frac{1}{5}$ du côté ſusdit du carré inſcrit, pour avoir une droite égale à la périphérie totale.

---

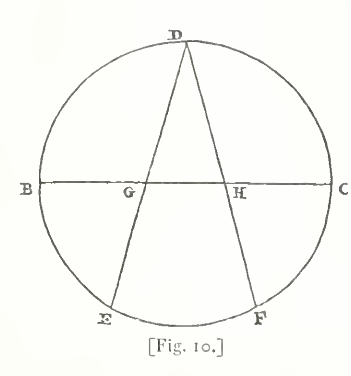
[18]) Puisque l'angle EDF égale 30°, on a $\frac{1}{2}$ DH $= \frac{1}{2}r : \cos 15° = r \sin 30° : \cos 15° = 2r \sin 15° = a_{12}$.

[19]) Soit M le centre du cercle, alors, puisque EDF est 30°, il est évident que GH est un des côtés du dodécagone circonscrit à un cercle dont le rayon égale DM et dont D est le centre.

[20]) Lisez 9.

Aliter.

Esto datus circulus cujus BC diameter. Dividatur semicircumferentia BC bifariam in D. reliqua verò trifariam in E & F. Et jungantur DE, DF, quæ secent diametrum in G & H. Erit trianguli GDH latus alterum unà cum basi GH quadrante BD exiguo majus, neque enim excedet $\frac{1}{5000}$ diametri BC. Sciendum est enim fieri DG vel DH duobus inscripti dodecagoni lateribus æquales [18]. GH autem lateri dodecagoni circumscripti [19]. Unde quidem junctas DG & GH majores esse constat quadrante BD. Nam quia per 8. [20] huj. octo latera dodecagoni circulo inscripti cum quatuor lateribus circumscripti majora sunt peripheriâ totâ, ideo sumptâ omnium quartâ parte erunt quoque duo latera inscripti cum latere uno circumscripti majora peripheriæ quadrante. Porro quoniam latus inscripti dodecagoni minus est quam partium 51764 qualium BC 200000: erunt latera duo, hoc est, GD, minor quam 103528. Circumscripti autem dodecagoni latus minus est partibus 53590, ipsa nimirum GH. Itaque junctæ unà DG, GH efficiunt minus quam 157118. At quadrantem BD constat ex præcedentibus majorem esse quam 157079. Ergo differentia minor est quam partium 39, cum 40 demum efficiant $\frac{1}{5000}$ diametri BC.



[Fig. 10.]

Aliter [21]).

Tribus semidiametris addatur $\frac{1}{10}$ lateris inscripti quadrati; composita semicircumferentiæ æquabitur tam propè, ut non $\frac{1}{18000}$ [22]) diametri brevior sit. Latus quadrati est majus quam partium 141421 qualium radius 100000, unde quod dictum est facile demonstratur.

Vel potius sex semidiametris addatur $\frac{1}{5}$ dicti lateris quadrati inscripti ut habeatur recta æqualis peripheriæ toti.

---

[21]) Tout ce second „Aliter" ne se trouvait pas dans le texte; Huygens l'a ajouté à la plume dans son exemplaire à une date qui nous est inconnue.

[22]) Lisez $\frac{1}{11000}$. La différence est sensiblement la $\frac{1}{11700}$ième partie du diamètre.

Problème III. Prop. XII.

Prendre une droite égale à un arc donné quelconque.

Soit donné un arc de circonférence CD, d'abord plus petit qu'un quadrant, dont il s'agiſſe de trouver une droite qui lui eſt égale. Diviſons l'arc CD en deux parties égales en E, et ſuppoſons que la droite FG ſoit égale à la corde ſous-tendue CD. Et ſoit FH égale à la ſomme des deux cordes CE, ED, qui ſous-tendent les moitiés des arcs. Et à cette FH ajoutons HI, le tiers de l'excès GH. La droite entière FI ſera preſque égale à l'arc CD: de manière que, en y ajoutant une petite partie, dont elle en contient 1200, elle ſera plus grande, même ſi l'arc CD eſt donné égal à un quadrant. Mais dans les arcs plus petits la différence ſera plus petite. Car ſi l'arc donné n'eſt pas plus grand que le ſextant de la périphérie, la ligne trouvée différera moins de $\frac{1}{6000}$ de ſa grandeur de la vraie longueur de l'arc. Or, que les droites trouvées de cette façon ſont plus petites que les arcs, cela réſulte du théorème 7 de cet ouvrage. Mais nous allons démontrer ce qui en eſt de la grandeur de la différence.

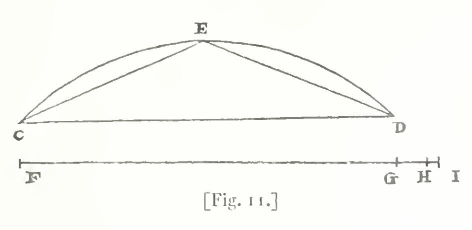
Ainſi, poſant d'abord l'arc CD égal à un quadrant de la périphérie, la droite CD, ou FG, ſera le côté du carré inſcrit dans le cercle, et plus petit par conſéquent que 141422 parties, dont le rayon du cercle en a 100000. Mais CE ou ED eſt le côté de l'octogone inſcrit, et par ſuite plus grande que 76536. Mais FH eſt égale au double de ED. Cette droite eſt donc ſupérieure à 153072. De ſorte que l'excès GH eſt plus grand que 11650. Et le tiers HI de cet excès eſt plus grand que 3883. Par conſéquent la droite FI toute entière eſt ſupérieure à 156955. Mais l'arc CD, étant ſuppoſé égal à un quadrant, eſt plus petit que 157080. La droite FI s'écarte donc de cet arc de moins de 125 parties, dont elle en a elle-même 156955. Cela fait donc moins que $\frac{1}{1200}$ de la droite FI elle-même.

Mais ſi l'arc CD eſt un ſextant de la périphérie, la droite CD, ou FG, eſt le côté de l'hexagone inſcrit, et ſe compoſe donc de 10000 parties, et CE ou ED eſt le côté du dodécagone, et eſt donc plus grand que $5176\frac{3}{8}$, dont le double FH eſt ſupérieur à $10352\frac{3}{4}$. Il s'enſuit que GH eſt plus grande que $352\frac{3}{4}$, et HI plus grande que $117\frac{7}{12}$. De ſorte que la droite FI toute entière eſt plus grande que $10470\frac{1}{3}$. Mais l'arc CD, un ſextant de la périphérie, eſt plus petit que 10472. Il manque donc à la ligne FI un nombre de ces mêmes parties plus petit que $1\frac{2}{3}$. Ce qui ne fait pas $\frac{1}{6000}$ de FI. Enſuite, ſi l'on donne un arc plus grand qu'un quadrant, on le diviſera en 4 parties égales, ou en 6, ou en un nombre plus grand encore, ſuivant que nous voulons faire uſage d'une dimenſion plus préciſe; mais en nombre pair: et à l'enſemble des cordes qui ſous-tendent ces parties on ajoutera le tiers de la quantité dont elles ſurpaſſent la ſomme de celles qui ſous-tendent des arcs doubles. De cette manière, en effet, on compoſera la longueur de l'arc entier.

PROBLEMA III. PROP. XII.

Dato arcui cuicunque rectam æqualem sumere.

Esto datus circumferentiæ arcus CD, primùm quadrante minor, cui rectam æqualem sumere oporteat. Dividatur arcus CD bifariam in E, sitque subtensæ CD æqualis recta FG. Duabus verò CE, ED, quæ subtendunt arcus dimidios, æqualis FH. Et ipsi FH jungatur HI triens excessus GH. Erit tota FI arcui CD æqualis ferè: adeò ut unâ sui particulâ, qualium 1200 continet, aucta, major futura sit, etiamsi arcus CD quadranti æqualis detur. In minoribus autem arcubus minor erit differentia. Nam si fuerit datus non major peripheriæ sextante, linea inventa minus quam $\frac{1}{6000}$ sui parte à vera arcus longitudine deficiet. Et minores quidem esse arcubus rectas eo modo inventas constat ex Theoremata 7. huj. De quantitate autem differentiæ est ostendendum.



[Fig. 11.]

Primùm itaque ponendo arcum CD quadranti peripheriæ æqualem, erit CD recta, hoc est, FG, latus quadrati circulo inscripti, & minor proinde quam partium 141422, qualium radius circuli 100000. CE autem vel ED latus inscripti octogoni, ideoque major quam 76536. Est autem duplæ ED æqualis FH. Ergo hæc major quam 153072. Quare excessus GH major quam 11650: Et hujus triens HI major quam 3883. Ideoque tota FI major quam 156955. Arcus autem CD cum quadranti æqualis ponitur minor est quam 157080. Itaque minus ab hoc discrepat recta FI quam partibus 125, qualium ipsa est 156955. Quæ utique minus efficiunt quam $\frac{1}{1200}$ ipsius FI.

Si verò sextans peripheriæ sit arcus CD, erit recta CD, hoc est, FG, latus hexagoni inscripti, ideoque partium 10000, & CE vel ED latus dodecagoni, ac proinde major quam $5176\frac{3}{8}$. cujus dupla FH major quam $10352\frac{3}{4}$. unde GH major quam $352\frac{3}{4}$; & HI major quam $117\frac{7}{12}$. Tota igitur FI major quam $10470\frac{1}{3}$. Arcus autem CD, sextans peripheriæ, minor est quam 10472. Ergo deficiunt lineæ FI partium earundem pauciores quam $1\frac{2}{3}$. Quæ non æquant $\frac{1}{6000}$ FI. Porro cum arcus quadrante major datus erit, dividendus est in partes æquales 4 vel 6 vel plures, prout accuratiori dimensione uti voluerimus; sed numero pares: Earumque partium subtensis simul sumptis adjungendus est triens excessus quo ipsæ superant aggregatum earum quæ arcubus duplis subtenduntur. Ita namque com-

Ou bien, pour la même raifon, on aura la même chofe, en cherchant la longueur de l'arc reftant à la demi-circonférence ou l'excès fur celle-ci, ou la longueur de celui qui refte à la circonférence entière, fi l'arc donné était plus grand que les trois quarts d'une circonférence; et cette longueur serait ajoutée ou enlevée à la moitié ou à la totalité de la longueur de la circonférence, que nous avons appris à trouver ci-devant.

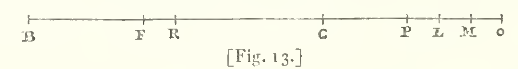
Théor. X. Prop. XIII.

Le côté d'un polygone équilatéral infcrit dans un cercle eft moyen proportionnel entre le côté du polygone femblable circonfcrit, et la moitié du côté du polygone infcrit dont le nombre des côtés eft la moitié [23]).

Dans un cercle dont le centre eft A, le rayon AB, foit BC le côté du polygone infcrit, et DE le côté, parallèle à ce BC, du polygone circonfcrit femblable. Ainfi la droite AB prolongée paffe par D, et AC par E. Et fi l'on mène CF à angles droits fur AB, cette droite fera le demi-côté du polygone infcrit, dont le nombre des côtés eft la moitié. Il s'agit donc de prouver, que BC eft moyenne proportionnelle entre ED et CF. Menons AG, qui divife ED en deux parties égales; elle fera auffi le demi-diamètre du cercle et égale à AB. Et puifqu'on a DA à AB, c'eft-à-dire DA à AG, comme ED eft à CB, mais BC à CF, comme DA à AG, à caufe des triangles femblables DAG, BCF; on a par conféquent que CB eft à CF comme ED eft à CB; ce qu'il fallait démontrer.

Lemme [24]).

Soit la ligne BC divifée en deux parties égales en R, et en parties inégales en F, et foit FC le plus grand fegment; et faifons BO égale à la fomme de BC et CF,



[Fig. 13.]

mais BM égale à la fomme de BC et CR. Je dis que le rapport de RB à BF eft plus grand que la troifième puiffance de celui de OB à BM. Prenons en effet chacun des deux fegments ML, LP égal à OM. Alors puifque MO eft égale à RF, (car cela fe comprend par la conftruction) PO fera le triple de FR. Mais auffi BM eft le triple de BR. Donc, comme BR à BM ainfi FR eft à PO. Et, en permutant, BM à PO comme BR à FR. Mais BO eft plus grand que BM. Donc le rapport de BO à OP fera plus grand que celui de BR à RF et par

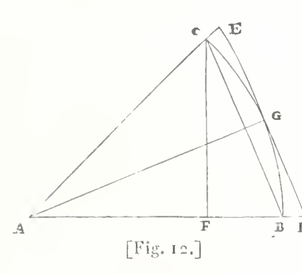
[23]) On a donc encore, en employant les notations de la note 7, p. 94: $p_{2n}^2 = p_n P_{2n}$. Consultez, sur la connection de ce théorème avec la „Prop. IX" de Snellius, la même note 7, p. 94.

ponetur longitudo arcus totius. Vel hac etiam ratione eadem habebitur, ſi arcus reliqui ad ſemicircumferentiam longitudo inveniatur aut ſupra eandem exceſſus, aut reliqui ad circumferentiam totam, ſi dodrante major fuerit datus; eaque longitudo adjungatur vel auferatur à dimidiæ vel totius circumferentiæ longitudine, quam antea invenire docuimus.

Theor. X. Prop. XIII.

Latus Polygoni æquilateri circulo inſcripti, proportione medium eſt inter latus polygoni ſimilis circumſcripti, & dimidium latus polygoni inſcripti ſubduplo laterum numero [23]).

In circulo cujus centrum A, radius AB, ſit latus inſcripti polygoni æquilateri BC; & latus circumſcripti ſimilis polygoni DE ipſi BC parallelum. Ergo producta AB tranſibit per D, & AC per E. Et ſi ducatur CF ipſi AB ad angulos rectos, ea erit dimidium latus polygoni inſcripti ſubduplo numero laterum. Itaque oſtendendum eſt, BC mediam eſſe proportione inter ED & CF. Ducatur AG, quæ dividat ED biſariam, itaque erit ipſa quoque circuli ſemidiameter & æqualis AB. Et quoniam eſt ut ED ad CB, ſic DA ad AB, hoc eſt, DA ad AG; ſicut autem DA ad AG, ita BC ad CF, propter triangulos ſimiles DAG, BCF. Erit proinde ut ED ad CB, ita quoque CB ad CF, Quod erat demonſtrandum.



[Fig. 12.]

Lemma [24]).

Eſto linea BC [Fig. 13] diviſa æqualiter in R; & inæqualiter in F, ſitque ſegmentum majus FC; & fiat BO æqualis utrique ſimul BC, CF; BM verò utrique BC, CR. Dico majorem eſſe rationem RB ad BF, quam triplicatam ejus, quam habet OB ad BM. Sumatur enim ipſi OM æqualis utraque harum ML, LP. Quoniam igitur MO ipſi RF æquales eſt, (nam hoc ex conſtructione intelligitur) erit PO tripla ipſius FR. Sed & BM tripla eſt BR. Ergo ut BR ad BM, ita FR ad PO. Et permutando ut BR ad FR, ſic BM ad PO. Major autem eſt BO quam BM. Ergo major erit ratio BO ad OP, quam BR ad RF: & per converſionem rationis

[24]) Ce „lemma" doit servir à préparer le théorème qui suit, auquel Huygens attacha tant d'intérêt; voir la note 17, p. 97 du Tome présent.

En posant BR $=a$, RF $=x$, le lemme nous apprend que pour $x<a$ on a: $\frac{a}{a-x}>$ $>\left(\frac{3a+x}{3a}\right)^3$, ou, si l'on veut, $\frac{1}{1-\zeta}>(1+\frac{1}{3}\zeta)^3$, où $\zeta<1$.

converfion des rapports, le rapport de OB à BP fera moindre que celui de RB à BF [25]). Enfuite, puifque OM et ML font égales, le rapport de BO à OM fera plus grand que BM à ML, et, par converfion des rapports, le rapport OB à BM fera plus petit que MB à BL. On prouvera encore de même que le rapport MB à BL est plus petit que LB à BP. De forte qu' à plus forte raifon la troifième puiffance du rapport de OB à BM fera plus petit que celui qui eft compofé des rapports OB à BM, BM à BL, et BL à BP, c'eft-à-dire que le rapport OB à BP. Mais RB à BF était plus grand que OB à BP. Donc, à plus forte raifon, le rapport RB à BF fera plus grand que la troifième puiffance du rapport OB à BM. Ce qu'il s'agiffait d'établir.

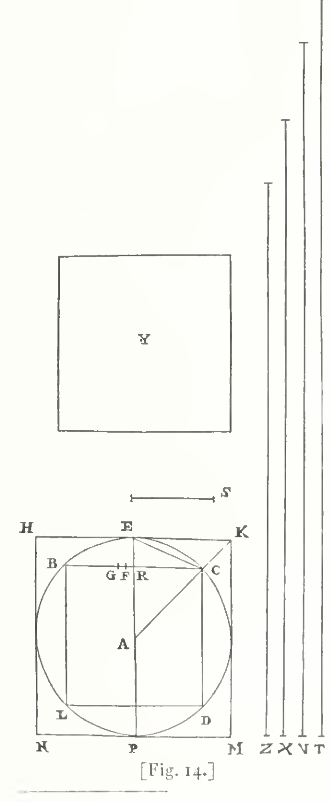
Théor. XI. Prop. XIV.

Toute circonférence de cercle eft moindre que la plus petite de deux moyennes proportionnelles entre les périmètres de polygones femblables, dont l'un eft régulièrement infcrit dans le cercle, l'autre circonfcrit. Et le cercle eft plus petit que le polygone femblable à ceux-là, dont le contour eft égal à la plus grande des moyennes [26]).

Soit un cercle BD, dont le centre eft A. Infcrivons-y un polygone équilatéral BCDL, et circonfcrivons-en un femblable à côtés parallèles HKMN. Suppofons que la droite T eft égale au périmètre du polygone HKMN, et la droite Z égale au périmètre de BCDL. Et foient entre Z et T deux moyennes proportionnelles X et V, dont X eft la plus petite. Je dis que la circonférence du cercle BD eft moindre que la droite X. Et fi l'on fait un polygone Y, dont le périmètre eft égal à la droite V, mais qui eft femblable au polygone BCDL ou HKMN, je dis que le cercle BD eft plus petit que le polygone Y. Menons en effet le diamètre PE du cercle, qui divife en deux parties égales les côtés parallèles BC, HK des polygones infcrit et circonfcrit, en R et E; E fera ainfi le point de contact du côté HK, et BC fera coupé en R à angles droits. Menons auffi du centre la droite ACK, qui divife en deux parties égales les angles C et K des deux polygones, car il eft avéré que cela fe fait par la même droite, et joignons CE. Mais prenons CF égale à CE, et foit CG une troifième proportionnelle à ces deux droites CR, CF. Alors, comme CE ou CF eft le côté d'un polygone infcrit, CG fera le côté du polygone femblable
* d'après 13. ici. circonfcrit *. Et par fuite les deux tiers de CF avec le tiers de CG feront enfemble
* d'après 9. ici. plus grands que l'arc EC *. Mais foit la droite S égale aux deux tiers de CF avec le tiers de CG. Cette droite fera donc plus grande que l'arc EC.

Et puifque CR eft à CF comme CF eft à CG, on aura auffi que le double de CR ajouté à CF eft au triple de CR, c'eft-à-dire que la fomme de BC et CF eft à la fomme de BC et CR, comme le double de CF avec CG eft au triple de CF: ou, en prenant les tiers de ces grandeurs, comme $\frac{2}{3}$ CF avec $\frac{1}{3}$ CG eft à CF, c'eft-à-dire comme S eft à CF. Donc auffi la troifième puiffance du rapport qui exifte

minor OB ad BP, quam RB ad BF [25]). Porro quoniam æquales ſunt OM, ML, major erit ratio BO ad OM, quam BM ad ML: & per converſionem rationis minor OB ad BM, quam MB ad BL. Eodem modo minor adhuc oſtendetur ratio MB ad BL, quam LB ad BP. Itaque omnino ratio triplicata ejus quam habet OB ad BM minor erit quam compoſita ex rationibus OB ad BM, BM ad BL, & BL ad BP, hoc eſt, quam ratio OB ad BP. Major autem erat RB ad BF, quam OB ad BP. Ergo omnino major erit ratio RB ad BF, quam triplicata rationis OB ad BM. Quod erat propoſitum.



[Fig. 14.]

Theor. XI. Prop. XIV.

Omnis circuli circumferentia minor eſt minore duarum mediarum proportionalium inter perimetros polygonorum ſimilium, quorum alterum ordinate circulo inſcriptum ſit, alterum circumſcriptum. Et circulus minor eſt polygono iſtis ſimili cujus ambitus majori mediarum æquetur [26]).

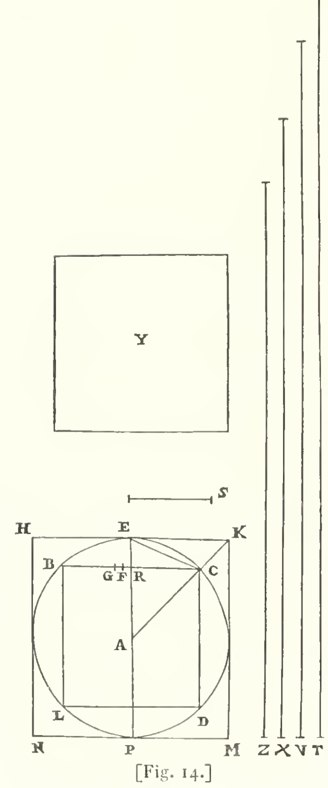
Eſto circulus BD, cujus centrum A. Et inſcribatur ei polygonum æquilaterum BCDL, ſimileque circumſcribatur lateribus parallelis HKMN. Sitque perimetro polygoni HKMN æqualis recta T, perimetro autem BCDL æqualis Z. Et inter Z & T duæ ſint mediæ proportionales X & V, quarum X minor. Dico circumferentiam circuli BD minorem eſſe rectâ X. Et ſi fiat polygonum in quo Y, cujus perimeter æquetur rectæ V, ſimile

[25]) Huygens, ici et plus loin, emploie un théorème de la théorie des proportions qui pour $a > b$, $c > d$ permet de conclure de l'inégalité $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ à celle-ci: $\frac{a}{a-b} < \frac{c}{c-d}$.

[26]) Consultez, sur la première partie de ce théorème, la p. 97 du Tome présent. La démonstration de cette partie revient à l'application de l'égalité $P_{2n} p_n = p_{2n}^2$ et des inégalités $2\pi < \frac{2}{3} p_{2n} + \frac{1}{3} P_{2n}$ et $\frac{p_n}{2p_n - p_{2n}} > \left(\frac{2p_n + p_{2n}}{3p_n}\right)^3$, prouvées au Théorème IX et au Lemme qui précède ici, et ensuite à la démonstration de l'inégalité $(2p_n - P_{2n})p_{2n} < p_n (2p_n - p_{2n})$ (c'est-à-

entre la fomme des deux droites BC, CF et la fomme de BC et CR eft égale à la troifième puiffance du rapport de S à CF. Mais le rapport RB à BF eft plus que la troifième puiffance de celui de la fomme BC, CF à la fomme BC, CR *. Donc le même rapport RB à BF eft plus grand que la troifième puiffance de celui de S à CF, c'eft-à-dire que celui du cube de S au cube de CF. Mais, comme RB à BF, ainfi le cube de RB eft au volume qui réfulte du carré RB et de BF. Donc le rapport du cube RB au produit du carré RB et de BF eft plus grand que celui du cube S au cube CF. Mais le rectangle formé par RB, BG, multiplié par FC eft moindre que le carré RB multiplié par BF; ce que l'on démontre de la manière fuivante. Puifque les droites RC, CF, CG forment une proportion, la quantité dont la plus grande dépaffe la moyenne, c'eft-à-dire FG, fera plus grande que celle dont la moyenne dépaffe la plus petite, c'eft-à-dire plus grande que FR. Mais FC eft plus grand que FB. Donc, à plus forte raifon, le rapport CF à FR fera plus grand que BF à FG. Et par converfion des rapports, le rapport FC à CR fera plus petit que FB à BG [25]). Et en permutant FC à FB fera plus petit que CR ou RB à BG. C'eft-à-dire, (en prenant BR pour la hauteur commune) que le carré RB au rectangle RBG. D'où ce qui réfulte du rectangle RBG par multiplication par FC fera moindre que ce qui réfulte du carré RB par FB, ainfi que je l'ai dit. Et ainfi, comme nous avons démontré que le rapport du cube RB au carré RB multiplié par BF, eft plus grand que le rapport du cube S au cube CF; à plus forte raifon le rapport du cube RB au folide formé par le rectangle RBG et FC fera plus grand que celui du cube S au cube CF. Et en permutant, le rapport du cube RB au cube S fera plus grand que celui du rectangle RGB multiplié par FC au cube CF; c'eft-à-dire, du rectangle RBG au carré CF. Mais le carré CF eft égal au rectangle GCR, c'eft-à-dire le rectangle formé par GC et RB, parce que les droites CR, CF et CG forment une proportion. Par fuite le rapport du cube

* *d'après le lemme qui précède.*



[Fig. 14.]

autem ſit polygono BCDL aut HKMN; Dico circulum BN minorem haberi polygono Y. Ducatur enim diameter circuli PE, quæ dividat biſariam latera parallela BC, HK, inſcripti circumſcriptique polygoni in R & E; erit autem E punctum contactus lateris HK, & BC ſecabitur in R ad angulos rectos. Ducatur etiam ex centro recta ACK, quæ utriuſque polygoni angulos C & K biſariam ſecet, nam hoc ab eadem recta fieri conſtat; & jungatur CE. Ipſi autem CE ponatur æqualis CF; ſitque duabus his CR, CF tertia proportionalis CG. Ergo qualis polygoni inſcripti latus eſt CE ſive CF, talis circumſcripti latus erit CG *. Ideoque duæ tertiæ CF cum triente CG ſimul majores erunt arcu EC*. Sit autem duabus tertiis CF cum triente CG æqualis recta S. Ergo & hæc major erit arcu EC. *per. 13. huj. *per. 9. huj.

Et quoniam ſe habet CR ad CF, ut CF ad CG; erit quoque dupla CR una cum CF ad triplam CR, hoc eſt, utraque ſimul BC, CF ad utramque BC, CR, ut dupla CF una cum CG ad triplam CF: vel ſumptis horum trientibus, ut $\frac{2}{3}$ CF unà cum $\frac{1}{3}$ CG ad CF, hoc eſt, ut S ad CF. Quare etiam triplicata ratio ejus quam habet utraque ſimul BC, CF ad utramque BC, CR eadem erit triplicatæ rationi S ad CF. Major autem eſt ratio RB ad BF quàm triplicata ejus, quam habet utraque ſimul BC, CF ad utramque BC, CR*. Ergo major eadem ratio RB ad BF quam triplicata ejus quam habet S ad CF, hoc eſt, quam cubi S ad cubum CF. Sicut autem RB ad BF, ita eſt cubus RB ad id quod fit ex quadrato RB in BF. Ergo major quoque ratio cubi RB ad quadratum RB in BF, quam cubi S ad cubum CF. Quadrato autem RB in BF minus eſt rectangulum ſub RB, BG, in FC; quod ſic oſtenditur. Quia enim proportionales ſunt RC, CF, CG, Erit id quo major mediam excedit, hoc eſt, FG major quam quo media minimam, hoc eſt, quam FR. Major autem eſt FC quam FB. Ergo omnino major erit ratio CF ad FR, quam BF ad FG. Et per converſionem rationis, minor ratio FC ad CR, quam FB ad BG [25]). Et permutando minor FC ad FB, quam CR ſeu RB ad BG: hoc eſt, (ſumptâ communi altitudine BR) quam quadrati RB ad rectangulum RBG. Unde quod fit ex rectangulo RBG in FC minus erit quam quod ex quadrato RB in FB, uti dictum fuit. Quum itaque major oſtenſa fuerit ratio cubi RB ad quadratum RB in BF, quam cubi S ad cubum CF; omnino *per lemma praec.

---

dire BG. CF < RB. BF) et de l'égalité $(2p_n - P_{2n}) : P_{2n} = p_n : P_n$ ou $2p_n - P_{2n} = p_{2n}^2 : P_n$ (c'est-à-dire BG : GC = RC : EK). A l'aide de ces formules le théorème en question se démontre ainsi:

$$2\pi < \frac{2}{3} p_{2n} + \frac{1}{3} P_{2n} = \frac{p_{2n}(2p_n + p_{2n})}{3p_n} < p_{2n} \sqrt[3]{\frac{p_n}{2p_n - p_{2n}}} < \sqrt[3]{\frac{p_n^2 p_{2n}^2}{2p_n - P_{2n}}} = \sqrt[3]{p_n^2 P_n}.$$

C'est ici la seule fois que Huygens emploie une relation (p. 155, l. 7) qui équivaut à la relation importante $2p_n - P_{2n} = p_{2n}^2 : P_n$.

Quant à la seconde partie du théorème, elle amène l'inégalité $\pi < \left(\frac{\sqrt[3]{p_{2n} P_{2n}^2}}{P_{2n}}\right)^2 S_{2n}$, qui, à l'aide la relation $S_{2n} = \frac{1}{2} P_{2n}$, se réduit, elle aussi, à celle-ci: $2\pi < \sqrt[3]{p_{2n}^2 P_{2n}}$; voir encore la première page de la préface et surtout la note 1, p. 115 du Tome présent.

RB au cube S fera plus grand que celui du rectangle RBG au rectangle formé par GC, RB; c'eft-à-dire, que BG à GC. Mais, comme BG eft à GC, ainfi RC eft EK. En effet, puifque CR eft à CG comme le carré fur CR au carré fur CF ou au carré fur CE, et que d'autre part le carré fur CR, eft au carré fur CE comme PR au diamètre PE; pour cette raifon on aura CR à CG comme PR à PE. D'où le double de CR, c'eft-à-dire CB, eft à CG comme le double de PR eft à PE, c'eft-à-dire comme PR eft à PA. Et, par partage, BG eft à GC comme RA à AP, ou AE, c'eft-à-dire, comme RC à EK, ce que nous difions. Et ainfi le rapport du cube RB au cube S, c'eft-à-dire, le rapport RB à S élevé à la troisième puiffance, eft plus grand que celui de RC à EK. Mais nous avons montré que S eft plus grand que l'arc EC. Donc à plus forte raifon la troifième puiffance du rapport RB ou RC à une droite égale à l'arc EC fera plus grand que celui de RC à EK. Mais, comme RC à l'arc EC, ainfi le périmètre du polygone BCDL, c'eft-à-dire, la ligne Z, eft a la circonférence du cercle BD; et comme RC à EK, ainfi le périmètre du polygone BCDL eft au périmètre du polygone HKMN, c'eft-à-dire, ainfi Z eft à T. Donc la troifième puiffance du rapport de Z à la circonférence entière BD fera auffi plus grande que celui de Z à T. Mais la troifième puiffance du rapport de Z à X eft égale au rapport de Z à T. Et ainfi le rapport de ce Z à la dite circonférence eft plus grand que celui de Z à X. Et par conféquent la circonférence eft plus petite que la droite X. Ce qu'il fallait démontrer.

Mais on doit favoir que cette droite X eft plus petite que les deux tiers de Z avec le tiers de T, c'eft-à-dire, plus petite que les deux tiers du périmètre du polygone infcrit augmentés du tiers du circonfcrit; la circonférence du cercle étant d'ailleurs plus petite que cela, d'après ce qui précède [27]). Car $\frac{2}{3}$ Z avec $\frac{1}{3}$ T eft égal à la plus petite des moyennes proportionnelles fuivant une proportion arithmétique, laquelle eft plus grande que la plus petite des moyennes proportionnelles fuivant une proportion géométrique. Mais nous allons encore démontrer du polygone Y qu'il eft plus grand que le cercle BD. Or, comme le rapport du polygone Y au polygone fembable HKMN eft le carré de celui du périmètre au périmètre, et que le périmètre du polygone Y eft égal à la droite V, et le périmètre HKMN égal à T, le rapport du polygone Y au polygone HKMN fera donc le carré de celui de V à T, c'eft-à-dire, égal à celui de X à T. Mais, comme le polygone HKMN eft au cercle BD, ainfi le périmètre de ce polygone, c'eft-à-dire, la ligne T, eft à la circonférence du cercle BD; parce que le polygone eft égal au triangle ayant une bafe égale à fon périmètre et comme hauteur le rayon AE, tandis que le cercle eft égal à un triangle de même hauteur et dont la bafe eft égale à la circonférence. Il réfulte donc, en combinant ces proportions, que le polygone Y fera au cercle BD comme X eft à la circonférence BD [28]). Mais nous avons montré que X eft plus grand que la circonférence BD. Donc le polygone Y fera auffi plus grand que le cercle BD. Ce qu'il fallait démontrer.

quoque major erit ratio cubi RB ad folidum fub rectangulo RBG in FC, quam cubi S ad cubum CF. Et permutando major ratio cubi RB ad cubum S, quam rectanguli RBG in FC ad cubum CF; hoc eft, quam rectanguli RBG ad quadratum CF. Eft autem quadrato CF æquale rectangulum GCR, hoc eft, rectangulum fub GC, RB, quia proportionales funt CR, CF, CG. Itaque major erit ratio cubi RB ad cubum S, quam rectanguli RBG ad rectangulum fub GC, RB, hoc eft, quam BG ad GC. Sicut autem BG ad GC, ita RC ad EK. Quia enim eft CR ad CG, ut quadratum CR ad quadratum CF feu quadratum CE: ut autem quadratum CR ad quadratum CE, ita eft PR ad PE diametrum: Erit idcirco CR ad CG, ut PR ad PE. Unde dupla CR, hoc eft, CB ad CG, ut dupla PR ad PE, hoc eft, ut PR ad PA. Et dividendo, BG ad GC, ut RA ad AP, feu AE, hoc eft, ut RC ad EK, quod dicebamus. Itaque major quoque ratio cubi RB ad cubum S, hoc eft, ratio triplicata RB ad S, quam RC ad EK. Eft autem S major oftenfa arcu EC. Ergo omnino major erit ratio triplicata RB feu RC ad æqualem arcui EC, quam RC ad EK. Sicut autem RC ad arcum EC, ita eft perimeter polygoni BCDL, hoc eft, linea Z ad circumferentiam circuli BD; Et ficut RC ad EK, ita perimeter polygoni BCDL ad perimetrum polygoni HKMN, hoc eft, ita Z ad T. Ergo major quoque triplicata ratio Z ad circumferentiam totam BD, quam Z ad T. Ratio autem triplicata Z ad X eadem eft rationi Z ad T. Itaque major eft ratio ipfius Z ad dictam circumferentiam, quam Z ad X. Ac proinde circumferentia minor quam recta X. Quod erat demonftrandum.

Sciendum eft autem ipfam X minorem effe duabus tertiis Z & triente T: hoc eft, duabus tertiis perimetri polygoni infcripti & triente circumfcripti, quibus alioqui minorem effe circuli circumferentiam conftat ex præcedentibus [27]). Nam $\frac{2}{3}$ Z cum $\frac{1}{3}$ T æquantur minori duarum mediarum fecundùm Arithmeticam proportionem, quæ major eft minore mediarum fecundum proportionem Geometricam. Jam verò & de polygono Y demonftrabimus, ipfum videlicet circulo BD majus effe. Quia enim polygonum Y habet ad polygonum fimile HKMN rationem duplicatam ejus quam perimeter ad perimetrum: perimeter autem polygoni Y æquatur rectæ V, & perim. HKMN ipfi T. habebit proinde polygon. Y ad polyg. HKMN rationem duplicatam ejus quam V ad T, hoc eft, eam quam X ad T. Sicut autem polygonum HKMN ad circulum BD, ita eft perimeter ipfius polygoni, hoc eft, linea T ad circuli BD circumferentiam; quoniam polygonum æquale eft triangulo bafin habenti perimetro fuæ æqualem & altitudinem radii AE, circulus autem æqualis ejufdem altitudinis triangulo cujus bafis circumferentiæ æquetur. Ex æquali igitur, erit polygonum Y ad circulum BD ficut X ad circumferentiam BD [28]). Eft autem X major oftenfa quam BD circumferentia. Ergo & polygonum Y majus erit circulo BD. Quod erat demonftrandum.

---

[27]) D'après la „Prop. IX", p. 137. déjà citée plus haut.

[28]) Comparez la note 1, p. 115 du Tome présent.

Par là eſt manifeſte l'erreur d'Oronce Fine [29]) qui prétendit que le quadrant d'un cercle eſt égal au plus petit des deux moyennes proportionnelles entre les côtés du carré inſcrit et du carré circonſcrit, et que le cercle eſt égal au carré formé au moyen du plus grand.

Théor. XII. Propos. XV.

Si entre le prolongement du diamètre d'un cercle et la circonférence on place une droite égale au rayon, et que cette droite prolongée coupe le cercle et rencontre la droite touchant le cercle à l'autre extrémité du diamètre: cette droite découpera de la tangente une partie plus grande que l'arc adjacent découpé [30]).

Soit décrit le cercle à centre C, dont le diamètre eſt AB. Prolongeons celui-ci du côté de A et plaçons entre lui et la circonférence une droite ED égale au rayon. Et ſuppoſons que cette droite prolongée coupe la circonférence en F, et rencontre en G la tangente, ſavoir celle qui touche le cercle à l'extrémité B du diamètre. Je dis que la tangente BG eſt plus grande que l'arc BF. Menons en effet par le centre la droite HL parallèle à EG, qui rencontre la circonférence aux points H et M, et la tangente BG en L. Et joignons DH, qui coupe le diamètre en K. Alors les triangles EDK, CHK ſont ſemblables, parce qu'ils ont les angles en K égaux, et l'angle E égal à l'angle C. Mais le côté ED eſt encore égal au côté HC, et ces côtés ſont ſous-tendus par des angles égaux. Par conſéquent le côté DK eſt auſſi égal au côté KH. Pour cette raiſon CA coupe DH en deux parties égales, et de même l'arc DAH. L'arc DH, ou l'arc FM qui lui eſt égal, eſt donc le double de l'arc AH. Mais l'arc MB eſt égal à l'arc AH. Donc l'arc FB ſera le

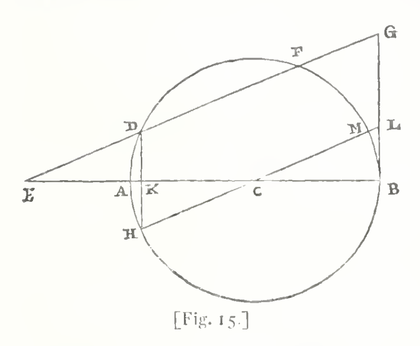
[29]) Oronce Fine, fils du médecin François Fine, naquit en 1494 à Briançon en Dauphiné. Il mourut le 8 octobre 1555 à Paris, où il jouissait d'une grande réputation comme professeur de mathématiques; réputation qui n'est pas confirmée par les ouvrages qu'il laissait. Il s'agit ici de l'ouvrage: „Orontii Finaei Delphinatis, Regii Mathematicarum Lutetiæ Professoris, Quadratura Circuli, tandem inuenta & clarissimè demonstrata. De circuli mensura & ratione circumferentiae ad diametrum, Demonstrationes duae. De multangularum omnium & regularium figurarum descriptione, Liber hactenus desideratus. De inuenienda longitudinis locorum differentia, aliter quàm per Lunares eclipses, etiam dato quouis tempore, Liber admodùm singularis. Planisphaerium geographicum, quo tum longitudinis atque latitudinis differentiae, tum directae locorum deprehenduntur elongationes. Lutetiae Parisiorum, Apud Simonem Colinaeum. 1544." in Folio. Toutefois dans l'exemplaire qui nous a été prêté par la Bibliothèque de l'Université de Paris à la Sorbonne, on ne trouve (à la p. 13) que le second des deux théorèmes mentionnés par Huygens, c'est-à-dire, celui qui se rapporte à l'aire du cercle; mais il faut bien que dans d'autres exemplaires ou dans une autre édition le premier théorème a été ajouté. En effet, dans la réfutation par Nonius de l'ouvrage cité, laquelle parut en 1546 sous le titre: „De Erratis Orontii Finaei Regii Mathematicarum Lutetiae Professoris". on lit à la page 28: „His in hunc modum constructis ait Orontius quadratum *bf*, aequari inprimis ipsi dato circulo *ah*, ... praeterea quadratum *cg*, eidem circulo *ah* esse isoperimetrum," où les

Ex his manifeſtus eſt Orontii Finei [29]) error, qui circumferentiæ quadrantem æqualem minori duarum proportione mediarum inter inſcripti & circumſcripti quadrati latera prodidit, circulum vero æqualem quadrato quod fieret à majori.

Theor. XII. Propos. XV.

Si inter productam circuli diametrum & circumferentiam recta aptetur radio æqualis, & producta circulum ſecet, occurratque tangenti circulum ad alterum diametri terminum: Intercipiet ea partem tangentis arcu adjacente abſciſſo majorem [30]).

Eſto deſcriptus circulus centro C, cujus diameter AB. Hæc autem producatur verſus A, interque ipſam & circumferentiam ponatur ED recta radio AC æqualis. Quæ producta ſecet circumferentiam in F, occuratque tangenti in G, ei nimirum quæ circulum contingit ad diametri terminum B. Dico tangentem BG majorem eſſe arcu BF. Ducatur enim per centrum recta HL parallela EG, quæ circumferentiæ occurrat in punctis H, M: tangenti verò BG in L. Et jungatur DH, quæ diametrum ſecet in K. Similes itaque ſunt trianguli EDK, CHK, quoniam angulos ad K æquales habent, & angulum E æqualem angulo C. Sed & latus ED æquale eſt lateri HC, ſuntque hæc latera æqualibus angulis ſubtenſa. Ergo æquale etiam latus DK lateri KH. Itaque CA ſecat bifariam ipſam DH, itemque arcum DAH. Arcus igitur DH ſive huic æqualis FM duplus eſt ad arcum AH. Ipſi autem AH æqualis eſt arcus MB. Igitur arcus FB triplus erit



[Fig. 15.]

carrés *bf* et *cg* sont les moyens proportionnels entre les carrés circonscrit et inscrit du cercle *ah*. D'ailleurs ce n'est pas là ni la première, ni la dernière fausse quadrature dont Oronce Fine se rendit responsable. On en recontre une autre au fol. 90 de son „Protomathesis" de 1532 et de nombreuses, différentes entre elles et d'avec celles signalées ici par Huygens, dans l'ouvrage posthume: „De rebus mathematicis, hactenus desideratis, Libri IIII. Quibus inter caetera, Circuli quadratura Centum modis, & suprà, per eundem Orontium recenter excogitatis, demonstratur. Lutetiae Parisiorum, M.D.LVI. Ex officina Michaëlis Vascosani."

[30]) Le théorème, identique avec la „Prop. XXIX" de Snellius, ne diffère pas essentiellement du „Theor. IX. Prop. IX", p. 137 du Tome présent, auquel la démonstration le ramène. Il s'exprime donc par les deux premières formules de la note 10, p. 136.

triple de l'arc AH. Puis, comme HK eſt le ſinus de l'arc HA et que LB eſt égal à la tangente de cet arc, les deux tiers de HK et le tiers de LB feront enſemble plus grands que l'arc AH *. De ſorte que ſi l'on prend le triple de tout, le double de HK, c'eſt-à-dire, HD ou GL, enſemble avec LB ſera plus grand que le triple de l'arc AH, c'eſt-à-dire que l'arc FB. Il paraît donc que la droite GB toute entière eſt plus grande que l'arc FB.

* d'après 9. ici [31]).

Ce théorème eſt le ſecond des deux ſur leſquels eſt baſée toute la Cyclométrie de Willebrord Snellius, et que lui-même voulait paraître avoir démontré, au moyen d'un raiſonnement qui contient une pure pétition de principe [32]). Mais nous démontrerons auſſi l'autre théorème, parce qu'il eſt ſurtout utile et fort digne d'être conſidéré.

Théor. XIII. Propos. XVI.

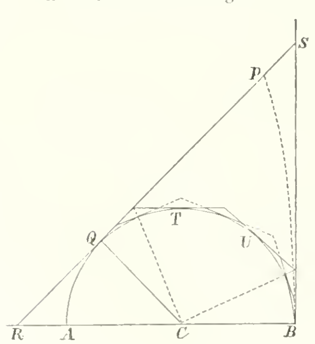
Si au diamètre d'un cercle on ajoute dans ſa direction un demi-diamètre, et qu' à partir de l'extrémité de la droite ajoutée on mène une droite qui coupe le cercle, et rencontre la droite qui touche le cercle à l'extrémité oppoſée du diamètre: cette droite interceptera ſur la tangente une partie plus petite que l'arc adjacent découpé [33]).

Soit un cercle [Fig. 16], dont le diamètre eſt AB; prolongeons celui-ci et ſuppoſons que AC eſt égal au demi-diamètre. Menons la droite CL, qui coupe la cir-

[31]) Voir le dernier alinéa du „Theor. IX. Prop. IX", p. 139.

[32]) Il s'agit de la „Propositio XXIX", p. 43 de l'ouvrage cité dans la note 6, p. 94 du Tome présent, laquelle proposition est, en effet, conforme avec le théorème du texte et nous apprend que la droite GB de la figure 15 est plus grande que l'arc BF.

Pour le montrer Snellius s'occupe du lieu géométrique d'un point P qu'on choisit sur la droite EG de la figure 15 de manière que la droite BP est égale à l'arc BF et que l'angle EPB est un angle aigu. Or, Snellius prétend que ce lieu, qui évidemment doit passer par le point B se trouvera entièrement à gauche de la tangente BG, auquel cas on aura BP < BG. Mais pour prouver cette assertion, il se borne à montrer que dans le cas particulier, où la droite EG touche le cercle, le point P se trouve en effet à gauche de la tangente. Ainsi le lieu cherché se compose d'une courbe qui de ce point P doit s'étendre au point B et il y a donc bien une certaine probabilité, mais aucune certitude, qu'elle restera en entier à gauche de la droite BG.



Quant au cas particulier que nous venons de mentionner, Snellius le traite dans sa „Propositio XXVI", p. 40 de son ouvrage. Soit alors, dans la figure ci-jointe, Q le point dans lequel D et F de la figure 15 se sont rencontrés. L'arc QTUB est donc, puisque QR = CQ, la $\frac{3}{8}$ième partie de la circonférence du cercle et, comme la figure le montre, elle est plus petite que six des côtés d'un polygone circonscrit à seize côtés. Snellius n'a donc qu'à prouver que BS est plus grand que ces six côtés; ce qu'il a fait en effet.

ad arcum AH. Porrò quoniam HK ſinus eſt arcus HA, ejuſdemque tangenti æquatur LB, Erunt duæ tertiæ HK & triens LB ſimul majores arcu AH *. Quare ſumptis omnium triplis erit dupla HK, hoc eſt, HD ſive GL unà cum LB major arcu AH triplo, hoc eſt, arcu FB. Apparet igitur totam GB arcu FB majorem eſſe. * per. 9. huj. [31])

Hoc Theorema alterum eſt ex iis quibus Cyclometria Willebrordi Snellii tota innititur, quæque demonſtraſſe ipſe videri voluit, argumentatione uſus quæ meram quæſiti petitionem continet [32]). Sed & alterum ſubjungemus, quod utile eſt imprimus & contemplatione digniſſimum.

Theor. XIII. Propos. XVI.

Si diametro circuli ſemidiameter in directum adjiciatur, & ab adjectæ termino recta ducatur quæ circulum ſecet, occuratque tangenti circulum ad terminum diametri oppoſitum: Intercipiet ea partem tangentis arcu adjacente abſciſſo minorem [33]).

---

[33]) Le théorème est, en effet, identique avec la „Proposition XXVIII", p. 42, du „Cyclometricus" de Snellius.

Pour juger de son efficacité, en comparaison avec les théorèmes de Huygens, il nous faut supposer, en employant les notations de la note 10, p. 136, qu'on a EG (Fig. 16) $= \frac{1}{2} a_{2n}$.

Posant alors $\alpha =$ arc EB $= 2\pi : 4n$, on trouve facilement:

$$\text{LB} = \frac{3}{2+\cos\alpha} \cdot \tfrac{1}{2} a_{2n} = \frac{3\sin\alpha}{4\sin\alpha + \sin 2\alpha} \cdot a_{2n} = \frac{3a_{2n}^2}{4a_{2n}+a_n}.$$

On a donc, d'après le théorème:

$$2\pi > \frac{12na_{2n}^2}{4a_{2n}+a_n} = \frac{3p_{2n}^2}{2p_{2n}+p_n} = p_{2n} + (p_{2n}-p_n)\cdot\frac{p_{2n}}{2p_{2n}+p_n} = p_{2n} + \tfrac{1}{3}(p_{2n}-p_n)\cdot\frac{3p_{2n}}{2p_{2n}+p_n} =$$

$$= p_{2n} + \tfrac{1}{3}(p_{2n}-p_n)\left\{1 + \frac{p_{2n}-p_n}{2p_{2n}+p_n}\right\} = p_{2n} + \tfrac{1}{3}(p_{2n}-p_n) + \tfrac{1}{9}\frac{(p_{2n}-p_n)^2}{p_{2n}} \cdot \frac{3p_{2n}}{2p_{2n}+p_n} =$$

$$= p_{2n} + \tfrac{1}{3}(p_{2n}-p_n) + \tfrac{1}{9}\frac{(p_{2n}-p_n)^2}{p_{2n}} + \left[\frac{(p_{2n}-p_n)^3}{9p_{2n}(2p_{2n}+p_n)}\right].$$

Comme on le voit, cette limite est du même ordre que celle, bien plus simple, indiquée par les „Theor. V et VII", pp. 129 et 133 du Tome présent.

Quant à la démonstration que Snellius prétendait avoir donnée, elle souffre du même défaut que celle de sa „Propositio XXIX" (voir la note précédente). Cette fois encore il s'agit d'un lieu géométrique, c'est-à-dire, de celui décrit par un point P choisi sur la droite CL (Fig. 16) de manière qu'on ait BP = arc EB et que l'angle CPB soit un angle aigu. Dans le cas particulier où CL touche le cercle il est clair qu'on aura EL = EB = BL; donc BP = arc EB sera plus grand que BL et le point P devra se trouver à droite de la tangente LB. De là Snellius se hasarde à conclure que toute la courbe, qui constitue le lieu géométrique cherché et qui doit nécessairement passer par le point B, sera située à droite de la tangente BL; auquel cas on doit avoir, en effet, arc. BE = BP > BL.

Or, pour faire voir combien cette conclusion est fallacieuse, il suffit de remarquer que si l'on place le point C un peu plus près du point A, une partie de la courbe se trouvera, dans le voisinage du point B, à gauche de BL; comme cela résulte aisément de la considération de la note 37, qui suit.

conférence pour la feconde fois en E; et fuppofons qu'elle rencontre en L la tangente qui touche le cercle à l'extrémité du diamètre B. Je dis que la longueur interceptée BL eft plus petite que l'arc BE. Joignons en effet AE, EB; puis, ayant porté AH égal à AE, menons HE et prolongeons cette droite, qui rencontre la tangente en K. Enfin menons EG à angles droits fur le diamètre AB, et ED perpendiculaire à la tangente BL. Puifque le triangle HAE eft ainfi ifofcèle, les angles H et HEA feront égaux entr'eux. Mais comme l'angle AEB eft droit, les deux angles HEA et KEB feront auffi égaux enfemble à un angle droit. Mais les deux angles H et HKB valent auffi un angle droit, parce que dans le triangle HKB l'angle B eft droit. Donc enlevant de part et d'autre deux quantités égales, ici l'angle H, là l'angle HEA, il refte que les angles KEB, HKB font égaux entr'eux. Le triangle KBE eft donc ifofcèle, et fes côtés EB, BK font égaux. Mais BD eft égal à EG. Donc DK eft la différence, dont BE dépaffe EG. Enfuite, puifque AG eft à AE comme AE à AB, les deux droites AG et AB vaudront
*25.5.*Élem.*[34]) enfemble plus que le double de AE*. Ainfi AE, c'eft-à-dire, AH, eft moindre que la moitié de la fomme des deux droites AG, AB, c'eft-à-dire, moindre que CA, augmenté de la moitié de AG. Par fuite, fi l'on retranche de part et d'autre CA, CH fera plus petit que la moitié de AG. Mais CA eft plus grand que la moitié de AG. Donc, fi l'on ajoute AC à AG, la ligne CG toute entière fera plus grande que le triple de CH. Mais, comme HG à GE, ainfi ED eft à DK, et comme GE à GC, ainfi LD eft à DE; on aura donc par la règle de la proportion dérangée [35]) que LD eft à DK, comme HG eft à GC. Et par converfion des rapports et par partage, DK eft à KL comme GC eft à CH. Donc auffi DK eft plus grand que le triple de KL. Mais DK était l'excès de EB fur EG. Donc KL eft plus petit que le tiers du dit excès. Or, KB eft égal à cette corde EB. Donc KB avec KL, c'eft-
* *d'après* 7. *ici* [36]). à-dire toute la droite LB eft à plus forte raifon moindre que l'arc BE*. Ce qu'il fallait démontrer.

Mais, en confidération du théorème précédent, il eft clair qu'il n'eft pas poffible de prendre fur le prolongement du diamètre BA un autre point, qui foit moins diftant du cercle que le point C et qui peut fervir à la même propriété, favoir qu' en traçant CL on obtienne une tangente interceptée BL toujours plus petite que l'arc découpé BE [37]).

[34]) Si quatuor magnitudines proportionales fuerint: maxima & minima reliquis duabus maiores erunt." (Clavius, p. 518).

[35]) Voir la note 22, p. 304 du Tome XI.

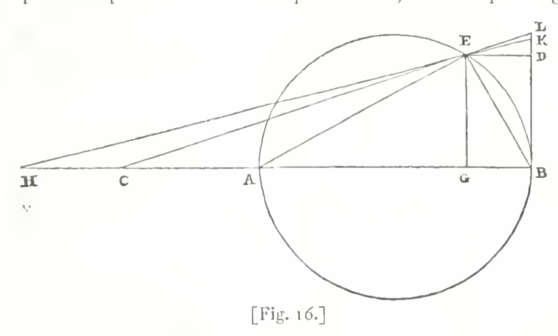
[36]) Voir le dernier alinéa de la démonstration du „Theor. VII", p. 135 du Tome présent.

[37]) Soit, en effet, dans la figure 15, E un point choisi sur le prolongement de AB de manière que AE soit un peu plus petit que le rayon du cercle. Alors on peut tirer une droite ED égale à ce rayon, qui sera l'équivalent de la droite CL de la figure 16. Ainsi LB de cette dernière figure sera alors identique avec GB de la figure 15; mais on sait que, dans cette figure 15, GB est plus grand que l'arc FB; donc il en sera de même avec LB de la figure 16, c'est-à-dire,

Eſto circulus, cujus diameter AB; quæ producatur, & ſit AC ſemidiametro æqualis. Et ducatur recta CL, quæ circumferentiam ſecundò ſecet in E; occurratque tangenti in L, ei nimirum quæ circulum contingit in termino diametri B. Dico interceptam BL arcu BE minorem eſſe. Jungantur enim AE, EB, poſitâque AH ipſi AE æquali ducatur HE & producatur, occurratque tangenti in K. Denique ſit EG diametro AB ad angulos rectos, ED verò tangenti BL. Quoniam igitur iſoſceles eſt triangulus HAE, erunt anguli inter ſe æquales H & HEA. Quia autem angulus AEB rectus eſt, etiam recto æquales erunt duo ſimul HEA, KEB. Verùm duo quoque iſti H & HKB uni recto æquantur, quoniam in triangulo HKB rectus eſt angulus B. Ergo demptis utrimque æqualibus, hinc nimirum angulo H, inde angulo HEA, relinquentur inter ſe æquales anguli KEB, HKB. Triangulus igitur iſoſceles eſt KBE, ejuſque latera æqualia EB, BK. Eſt autem BD æqualis EG. Ergo DK differentia eſt quâ BE excedit EG. Porrò quoniam eſt AG ad AE, ut AE ad AB, erunt duæ ſimul AG, AB majores duplâ AE *. Ideoque AE, hoc eſt, AH minor quam dimidia utriuſque ſimul AG, AB; hoc eſt, minor quam CA cum dimidia AG. Quare ablatâ utrimque CA, erit CH minor dimidiâ AG. CA verò dimidiâ AG major eſt. Ergo ſi addatur AC ad AG, erit tota CG major quam tripla ipſius CH. Quia autem ut HG ad GE, ita eſt ED ad DK; ut autem GE ad GC, ita LD ad DE: Erit ex æquo in proportione turbata [35]) ut HG ad GC, ita LD ad DK. Et per converſionem rationis & dividendo, ut GC ad CH, ita DK ad KL. Ergo etiam DK major quam tripla KL. Erat autem DK exceſſus ipſius EB ſupra EG. Ergo KL minor eſt triente dicti exceſſus. KB autem æqualis eſt ipſi EB ſubtenſæ. Ergo KB unà cum KL, hoc eſt, tota LB omnino minor erit arcu BE *. Quod erat demonſtrandum.

*25.5.*Elem.*[34])

* *per. 7. huj.*[36])



[Fig. 16.]

Perpenſo autem Theoremate præcedenti, liquet non poſſe ſumi punctum aliud in producta BA diametro, quod minus à circulo diſtet quam punctum C, eandemque ſervet proprietatem, ut nimirum ductâ CL fiat tangens intercepta BL ſemper minor arcu abſciſſo BE [37]).

---

cette droite pourra surpasser l'arc EB, aussitôt que le point C est choisi sur AB à droite de sa position actuelle.

Puis l'ufage de ce théorème eft multiple, tant pour trouver les angles de triangles dont les côtés font donnés, et fela fans le fecours de tables, que pour trouver les côtés quand les angles font donnés, ou encore pour déterminer la corde d'un arc de périphérie quelconque. Toutes ces queftions ont été traitées affidûment et à fond par Snellius dans fa Cyclométrie [38]).

Théorème XIV. Propos. XVII [39]).

Le centre de gravité d'un fegment de cercle divife le diamètre de ce fegment, de telle manière que la partie au fommet eft plus grande que l'autre, et plus petite que une et demie fois cette autre.

Soit un fegment de cercle ABC (mais fuppofons-le plus petit qu'un demi-cercle, parce que les autres ne fatiffont pas à la propofition), et foit BD le diamètre du fegment, qui eft partagé en deux parties égales en E. Nous avons ainfi à démontrer d'abord que le centre de gravité du fegment AB fe trouve à partir du fommet B au-delà du point E; car nous avons montré ailleurs [40]) qu'il eft fitué fur le diamètre. Menons par E une droite parallèle à la bafe, qui rencontre de part et d'autre le cercle aux points F et G. Par ces points menons KI, HL, perpendiculaires à la bafe AC; ces droites forment, avec celle qui touche le fegment au fommet, le rectangle KL. Puifque le fegment eft moindre qu'un demi-cercle, il eft certain que la moitié FL du dit rectangle eft contenue dans la figure AFGC, qui contient en outre les efpaces AFI et LGC, mais que l'autre moitié KG du rectangle KL embraffe le fegment FBG, enfemble avec les efpaces FBK, BGH. Comme ces efpaces font tout entiers au-deffus de la droite FG, leur centre de gravité commun fera fitué auffi au-deffus de cette même droite. Mais le point E fur cette droite eft le centre de gravité de tout le rectangle KL. Donc le centre de gravité de l'efpace reftant BFILG fera fous la droite FG. Mais auffi le centre de gravité commun des efpaces AFI, LGC eft au-deffous de la même droite FG. Par conféquent, le centre de gravité de la grandeur formée par ces efpaces et le dit efpace BFILGB, c'eft-à-dire, du fegment ABC lui-même, doit néceffairement être trouvé au-deffous de la ligne FG, et par fuite au-deffous du point E.

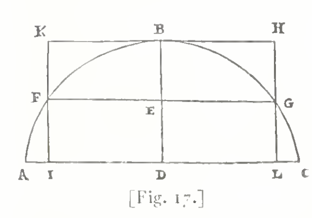
[38]) Voir dans l'„Appendicula, et Cyclometricae usus" les problèmes V („Datis trianguli rectanguli lateribus ejus angulos invenire") et VI („Datis trianguli rectanguli angulis oppositorum laterum rationem invenire"), p. 95—102 de l'ouvrage, cité dans la note 6, p. 94 du Tome présent; et de même aux p. 76—83 de cet ouvrage la „Propositio XXXVIII: Datae

Porrò usus hujus Theorematis multiplex est, cum in inveniendis triangulorum angulis quorum cognita sint latera, idque citra tabularum opem, tum ut latera ex angulis datis inveniantur, vel cuilibet peripheriæ arcui subtensa assignetur. Quæ omnia à Snellio in Cyclometricis diligenter pertractata sunt [38]).

THEOREMA XIV. PROPOS. XVII [39]).

Portionis circuli centrum gravitatis diametrum portionis ita dividit, ut pars quæ ad verticem reliquâ major sit, minor autem quam ejusdem sesquialtera.

Esto circuli portio ABC, (ponatur autem semicirculo minor, quoniam cæteræ ad propositum non faciunt) & diameter portionis sit BD, quæ bifariam secetur in E. Itaque ostendendum est primò centrum gravitatis portionis AB distare à vertice B ultra punctum E; nam, quod in diametro situm sit, alibi ostendimus [40]). Ducatur per E recta basi parallela, quæ utrimque circumferentiæ occurrat in punctis F & G. Per quæ ducantur KI, HL basi AC ad angulos rectos, atque hæ cum ea, quæ portionem in vertice contingit, constituant rectangulum KL. Quoniam igitur portio semicirculo minor est, constat rectanguli dicti dimidium FL contineri intra segmentum AFGC, atque insuper spatia quædam AFI, LGC. Alterum verò rectanguli KL semissem KG complecti segmentum FBG unà cum spatiis FBK, BGH. Quæ spatia quum sint tota supra rectam FG, etiam centrum commune gravitatis eorum supra eandem situm erit. Est autem E punctum in ipsa FG centrum grav. totius rectanguli KL. Igitur spatii reliqui BFILGB centrum grav. erit infra rectam FG. Sed & spatiorum AFI, LGC commune gravitatis centrum est infra eandem FG. Ergo magnitudinis ex spatiis hisce & dicto spatio BFILGB compositæ, quæ est portio ipsa ABC, centrum gravitatis infra lineam FG reperiri necesse est, ideoque infra E punctum.



[Fig. 17.]

cuicunque peripheriæ inscriptam veræ tam propinquam in numeris exhibere, quam erit ratio diametri ad suam peripheriam data".

39) Consultez, sur la partie de l'ouvrage présent qui commence avec cette proposition, les p. 97 et 98 de „l'Avertissement".

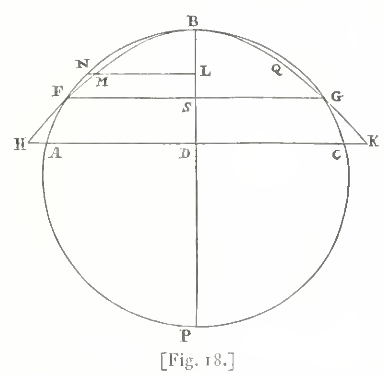
40) Voir le „Theorema IV" des „Theoremata de quadratura hyperboles, ellipsis et circuli, ex dato portionum gravitatis centro", p. 295 du Tome XI.

Suppoſons maintenant que le même diamètre ſoit diviſé en S [Fig. 18], de telle manière que BS ſoit une et demie fois le reſte SD. Je dis que le centre de gravité du ſegment ABC eſt moins diſtant du ſommet que le point S. Soit, en effet, BDP le diamètre du cercle entier, et menons par S une droite parallèle à la baſe, qui rencontre la circonférence en F et G. Et imaginons une parabole dont le ſommet eſt B, l'axe BD, et le paramètre égal à SP. Et qu'elle rencontre la baſe du ſegment en H et K. Puiſqu' alors le carré ſur FS eſt égal au rectangle BSP, c'eſt-à-dire, à celui formé par BS et le paramètre de la parabole, celle-ci paſſera par le point F et de même par G. Mais les parties BF, BG de la ligne parabolique tomberont à l'intérieur de la circonférence, et les autres FH, GK lui ſeront extérieures. Car cela ſe démontre en menant une ordonnée NL entre B et S, qui rencontre la circonférence en N, et la parabole en M. Or, puiſque le carré ſur NL eſt égal au rectangle BLP, tandis que le carré ſur ML l'eſt au rectangle formé par les lignes BL, SP; et que le rectangle BLP eſt plus grand que celui formé par BL, SP: le carré ſur NL ſera plus grand que le carré ſur ML, et la ligne NL plus grande que la ligne ML. Et la même choſe arrive quel que ſoit le point entre B et S ou l'on applique l'ordonnée. Par conſéquent, il eſt néceſſaire que la partie BF de la circonférence ſoit toute entière à l'extérieur de la parabole, et pour la même raiſon la partie BG. D'autre part, puiſque le rectangle BDP eſt égal au carré ſur DA, et que le rectangle formé par BD, SP eſt égal au carré ſur DH; HD ſera plus grand que AD quant aux carrés, donc auſſi en longueur. La même choſe arrivera quel que ſoit l'endroit entre S et D où l'on place l'ordonnée. Par ſuite les parties FA et GC de la circonférence tombent à l'intérieur de la parabole. On obtient ainſi certains eſpaces FNBM et BQG, ainſi que d'autres HFA, GCK. Comme les derniers de ces eſpaces ſont tout entiers au-deſſous de la ligne FG, leur centre de gravité commun eſt auſſi au-deſſous de cette droite. Mais le centre de gravité du ſegment parabolique HBK eſt dans cette droite FG, ſavoir au point S*. Donc le centre de gravité de la partie reſtante AFMBQGC ſera au-deſſus de la droite FG. Mais il eſt clair que le centre de gravité des eſpaces FMBN, BQG eſt également ſitué au-deſſus d'elle puiſque ces eſpaces ſont tout entiers au-deſſus de cette droite FG. Donc on trouvera auſſi au-deſſus de la ligne FG le centre de gravité de l'eſpace formé par ces deux et AFMBQGC, c'eſt-à-dire du ſegment de cercle ABC; et comme ce centre eſt ſur le diamètre BD, il ſera moins diſtant du ſommet B que le point S. Ce qu'il fallait démontrer.

* 8. *livre 2. Archim. de Aequipond.* [41])

[41]) Voici cette Propoſition telle qu'on la trouve p. 138 de l'édition de Bâle, mentionnée dans la note 3, p. 274 du T. XI: „Cuiuscunque portionis à recta linea & rectanguli coni sectione comprehensae, centrum grauitatis dividit diametrum portionis, ita ut pars eius ad verticem terminata, sit ad partem eam sequialtera, quae ad basim portionis terminatur". (Heiberg, T. II, p. 213).

Idem verò diameter BD fecetur nunc in S [Fig. 18], ita ut BS fit fefquialtera reliquæ SD. Dico centrum grav. portionis ABC minus diftare à vertice B quam punctum S. Sit enim BDP totius circuli diameter. & ducatur per S recta bafi parallela quæ circumferentiæ occurrat in F & G. Et parabole intelligatur cujus vertex B, axis BD, rectum verò latus æquale SP. Et occurrat bafi portionis in H & K. Quoniam igitur quadratum FS æquale eft rectangulo BSP, hoc eft, ei quod fub BS & latere recto parabolæ continetur, tranfibit ea per F punctum, itemque per G. Partes autem lineæ parabolicæ BF, BG intra circumferentiam cadent, fed reliquæ FH, GK erunt exteriores. Hoc enim oftenditur ductâ inter B & S ordinatim applicatâ NL, quæ circumferentiæ occurrat in N, parabolæ autem in M. Nam quia quadratum NL æquale eft rectangulo BLP, quadratum verò ML rectangulo contento lineis BL, SP: rectangulum autem BLP majus eo quod fub BL, SP continetur: erit quadratum NL majus quadrato ML, & NL linea major quam ML. Idem autem continget ubicunque inter B & S aliqua ordinatim applicabitur. Igitur partem circumferentiæ BF totam extra parabolam ferri neceffe eft, eâdemque ratione partem BG. Rurfus quia rectangulum BDP æquale eft quadrato DA; rectangulum verò fub BD, SP contentum quadrato DH; erit HD major quam AD potentiâ, ideoque & longitudine. Idemque eveniet ubicunque inter S, D, ordinatim aliqua applicabitur. Quare partes circumferentiæ



[Fig. 18.]

FA, itemque GC intra parabolam cadent. Fiunt igitur fpatia quædam FNBM, & BQG, itemque alia HFA, GCK. Quorum hæc cum tota fint infra lineam FG, etiam centrum commune gravitatis eorum infra eandem erit. At parabolicæ portionis HBK centrum grav. eft in ipfa FG, nimirum S punctum *. Ergo partis reliquæ AFMBQGC centrum grav. erit fupra rectam FG. Sed fupra hanc fitum quoque apparet centrum grav. fpatiorum FMBN, BQG, quum tota fint fupra ipfam FG. Ergo & fpatii ex hifce duobus & AFMBQGC compofiti, hoc eft, portionis circuli ABC centrum grav. fupra lineam FG reperietur: quumque fit in BD diametro, minus aberit à vertice B quam punctum S. Quod erat oftendendum.

* *8. lib. 2. Archim. de Equipond.* [41])

Théor. XV. Propos. XVIII.

Un ſegment de cercle plus petit qu'un demi-cercle eſt au triangle maximum inſcrit dans un rapport plus grand que quatre à trois; mais plus petit que celui de trois et un tiers fois le diamètre du ſegment reſtant au diamètre du cercle augmenté du triple de la droite qui, à partir du centre du cercle, atteint la baſe du ſegment [42]).

Soit un ſegment de cercle plus petit qu'un demi-cercle, dans lequel eſt inſcrit le triangle maximum ABC. Soit BD le diamètre du ſegment, et BF le diamètre du cercle dont le ſegment eſt découpé, E ſon centre. Je dois montrer d'abord que le rapport du ſegment ABC au triangle inſcrit eſt plus grand que quatre à trois. Soit G le centre de gravité du ſegment ABC, et coupons DF en H, de telle manière que HD ſoit le double du reſte HF.

Alors, parce que FB eſt le double de EB, et que DB eſt plus petit que le double de GB [43]), le rapport de FB à BD ſera plus grand que celui de EB à BG. Et par converſion des rapports le rapport de BF à FD ſera moindre que celui de BE à EG [44]). Et en permutant, BF à BE (lequel rapport eſt de deux à un) eſt moindre que FD à EG. Donc FD eſt plus grand que le double de EG. Mais les deux tiers de cette FD ſont HD. Donc HD eſt plus grand que les quatre tiers de EG. Mais, comme HD eſt à EG, ainſi le ſegment ABC eſt au triangle inſcrit; car c'eſt ce que nous avons démontré antérieurement dans les Théorèmes ſur la quadrature de l'Hyperbole, de l'Ellipſe et du Cercle [45]). Donc le rapport de la portion au triangle inſcrit ABC eſt plus grand que de quatre à trois.

Mais nous allons démontrer maintenant que le ſegment eſt au triangle ABC dans un rapport moindre que celui de trois et un tiers fois DF au diamètre du cercle BF augmenté du triple de ED. Coupons le diamètre du ſegment en R, de telle façon que BR ſoit une fois et demie le reſte RD. Le point R tombe donc entre G et D*, car nous avons ſuppoſé que G eſt le centre de gravité du ſegment ABC. Et puiſque le rapport du ſegment au triangle inſcrit eſt le même que celui de HD à EG, comme nous venons de le dire, mais que le rapport de HD à EG eſt plus petit que celui de HD à ER, pour cette raiſon le rapport du ſegment au

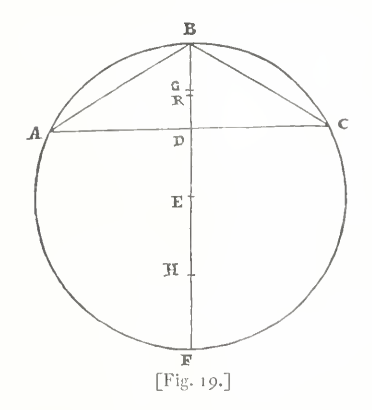
* *d'après ce qui précède* [46]).

[42]) La première partie de cette propoſition n'est qu'une répétition du „Theor. III. Prop. III", p. 123 du Tome présent; mais la seconde partie amène pour la limite supérieure une approximation plus forte, que celle fournie par le „Theor. IV. Prop. IV", p. 127; ce qui résulte de la circonstance que le rapport dans lequel le point R, dont on fait usage dans la démonstration, divise BD, est égal à la limite du rapport $\frac{BG}{GD}$ pour des arcs de plus en plus petits.

Theor. XV. Propos. XVIII.

Circuli portio ſemicirculo minor ad inſcriptum triangulum maximum majorem rationem habet quam ſeſquitertiam, minorem verò quam diameter portionis reliquæ tripla ſeſquitertia ad circuli diametrum cum tripla ea, quæ à centro circuli pertingit ad portionis baſin [42]).

Sit portio ſemicirculo minor, cui inſcriptum triangulum maximum ABC. Diameter autem portionis ſit BD; & diameter circuli à quo portio reſecta eſt, BF, centrum E. Oſtendendum eſt primò, portionis ABC ad triangulam inſcriptum majorem eſſe rationem quam ſeſquitertiam. Eſto portionis ABC centrum grav. punctum G, & ſecetur DF in H, ut ſit HD dupla reliquæ HF.



[Fig. 19.]

Quoniam igitur FB eſt dupla EB; DB autem minor quam dupla GB [43]). Erit major ratio FB ad BD, quam EB ad BG. Et per converſionem rationis, minor BF ad FD, quam BE ad EG [44]). Et permutando minor BF ad BE, (quæ proportio dupla eſt) quam FD ad EG. Igitur FD major eſt quam dupla EG. Ipſius autem FD duas tertias continet HD. Ergo HD major eſt quam ſeſquitertia EG. Sicut autem HD ad EG, ita eſt portio ABC ad inſcriptum ſibi triangulum: hoc enim antehac demonſtravimus in Theorematis de Hyperbolis Ellipſis & Circuli quadratura [45]). Itaque major eſt ratio portionis ad inſcriptum triangulum ABC quam ſeſquitertia.

Quod autem ad triangulum ABC portio minorem habeat rationem quam tripla ſeſquitertia ipſius DF ad diametrum circuli BF unà cum tripla ED, id nunc oſtendemus. Secetur diameter portionis in R, ut BR ſit ſeſquialtera reliquæ RD. Ergo cadit R punctum inter G & D* quoniam poſitum fuit G centrum gravitatis *per præced. [46])
in portione ABC. Quumque portionis ad inſcriptum triangulum eadem ſit ratio, quæ HD ad EG, ut modò dictum fuit; minor autem ſit ratio HD ad EG, quam HD ad ER: Erit propterea minor quoque portionis ad inſcriptum triangulum

---

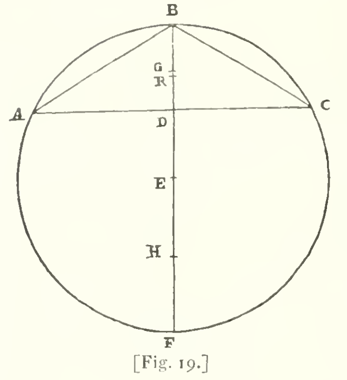
[43]) Voir la première partie du théorème précédent.

[44]) Voir la note 25, p. 151.

[45]) Voir le „Theorema VII" de la p. 305 du Tome XI.

[46]) Voir la seconde partie du théorème précédent.

triangle inſcrit ſera auſſi plus petit que celui de HD à ER, ou de HD priſe cinq fois au quintuple de ER. Or, HD (puiſqu'il eſt égal aux deux tiers de DF) pris cinq fois ſera égal aux dix tiers, c'eſt-à-dire à trois et un tiers fois DF. Mais ER, qui ſe compoſe de ED et des deux cinquièmes de DB, ſi on le prend cinq fois, ſera égal au double de BD avec le quintuple de ED, c'eſt-à-dire, au double de toute la droite EB et en plus le triple de ED. Il paraît donc que le rapport du ſegment ABC au triangle inſcrit eſt moindre que celui de trois et un tiers fois DF au double de EB, c'eſt-à-dire au diamètre BF, augmenté du triple de ED. Ce qu'il fallait démontrer.



[Fig. 19.]

Théor. XVI. Propos. XIX.

Un arc quelconque, plus petit qu' une demi-circonférence, eſt plus grand que ſa corde augmentée du tiers de la différence dont la corde dépaſſe le ſinus. Mais un tel arc eſt plus petit que la corde priſe avec la droite qui eſt au dit tiers comme le quadruple de la corde joint au ſinus eſt au double de la corde avec le triple du ſinus[47]).

Soit un cercle dont le centre eſt D, le diamètre FB. Et ſoit un arc BA plus petit que la demi-circonférence, auquel nous menons la corde BA et le ſinus AM; ce dernier eſt donc à angles droits ſur le diamètre FB. Enſuite, ſoit une droite GH égale à cette AM, et GI égale à la corde AB. L'excès eſt donc HI, dont nous ajoutons le tiers IK à GI. Il faut montrer d'abord que l'arc AB eſt plus grand que toute la droite GK. Or, cela eſt manifeſte d'après le théorème 7 [48]). Mais ſi l'on ajoute à GI la droite IO qui eſt à IK, le tiers de HI, dans le même rapport que le quadruple de GI avec GH au double de GI avec le triple de GH; je dis que toute la droite GO eſt plus grande que l'arc AB. Formons, en effet, ſur les lignes GH, HI, IO des triangles dont le ſommet commun eſt L, et dont la hauteur ſoit égale au rayon DB. Et joignons DA, et menons le diamètre CE du cercle qui diviſe la droite AB en deux parties égales en N, et l'arc AB en E. Et joignons AE, EB.

[47]) La première partie est identique avec le „Theor. V. Prop. V", p. 129 du Tome présent. D'après la seconde partie on a, en employant toujours les notations de la note 10, p. 136,

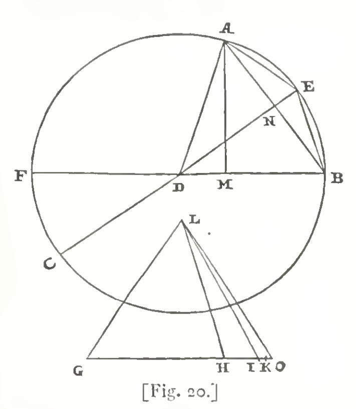
$$2\pi : 2n < a_{2n} + \tfrac{1}{3}\left(a_{2n} - \tfrac{1}{2}\, a_n\right) \frac{4a_{2n} + \frac{1}{2}a_n}{2a_{2n} + \frac{3}{2}a_n},$$

c'est-à-dire:

ratio quam HD ad ER, five quam HD quinquies fumpta ad quintuplam ER. Atqui HD, (cum fit æqualis duabus tertiis DF) quinquies fumpta æquabitur decem tertiis, hoc eft, triplæ fefquitertiæ DF. ER verò quæ continet ED & duas quintas ipfius DB, fi quinquies fumatur, æquabitur duplæ BD & quintuplæ ED; hoc eft, duplæ totius EB atque infuper triplæ ED. Igitur apparet portionem ABC ad infcriptum triangulum minorem habere rationem quam triplam fefquitertiam DF ad duplam EB, hoc eft, diametrum BF, unà cum tripla ED. Quod erat demonftrandum.

Theor. XVI. Propos. XIX.

Arcus quilibet femicircumferentiâ minor, major eft fuâ fubtenfâ fimul & triente differentiæ quâ fubtenfa finum excedit. Idem verò minor quam fubtenfa fimul cum ea quæ ad dictum trientem fefe habeat, ut quadrupla fubtenfa juncta finui ad fubtenfam duplam cum finu triplo [47]).



[Fig. 20.]

Efto circulus cujus D centrum, diameter FB. Et fit arcus BA femicircumferentiâ minor, cui fubtenfa ducatur BA, finus autem AM: quæ nimirum diametro FB fit ad angulos rectos. Porro ipfi AM fit æqualis recta GH, & GI æqualis fubtenfæ AB. Exceffus igitur eft HI; cujus triens IK ipfi GI adjiciatur. Oftendendum eft primò, arcum AB totâ GK majorem effe. Hoc autem ex Theoremate 7. eft manifeftum [48]). At cum ipfi GI additur IO quæ ad IK trientem ipfius HI rationem habeat, quam quadrupla GI unà cum GH ad duplam GI cum tripla GH. Dico totam GO arcu AB majorem effe. Conftituantur enim fuper lineis GH, HI, IO, triangula quorum communis vertex fit L, altitudo autem æqualis radio

---

$$2\pi < p_{2n} + \tfrac{1}{3}(p_{2n} - p_n)\cdot\frac{4p_{2n}+p_n}{2p_{2n}+3p_n} = p_{2n} + \tfrac{1}{3}(p_{2n} - p_n)\left\{1 + \frac{2(p_{2n}-p_n)}{2p_{2n}+3p_n}\right\} =$$

$$= p_{2n} + \tfrac{1}{3}(p_{2n}-p_n) + \tfrac{2}{15}\frac{(p_{2n}-p_n)^2}{p_{2n}}\left\{1 + \frac{3(p_{2n}-p_n)}{2p_{2n}+3p_n}\right\} = p_{2n} + \tfrac{1}{3}(p_{2n}-p_n) +$$

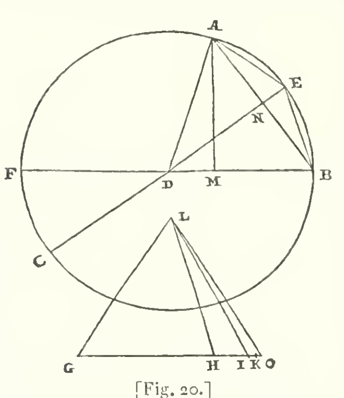
$$+ \tfrac{2}{15}\frac{(p_{2n}-p_n)^2}{p_{2n}} + \tfrac{2}{25}\frac{(p_{2n}-p_n)^3}{p_{2n}^2}\left\{1 + \frac{3(p_{2n}-p_n)}{2p_{2n}+3p_n}\right\} = p_{2n} + \tfrac{1}{3}(p_{2n}-p_n) + \tfrac{2}{15}\frac{(p_{2n}-p_n)^2}{p_{2n}} +$$

$$+ \tfrac{2}{25}\frac{(p_{2n}-p_n)^3}{p_{2n}^2} + \left[\frac{6(p_{2n}-p_n)^4}{25p_{2n}^2(2p_{2n}+3p_n)}\right]$$; expression dont les *trois* premiers termes correspondent avec la suite (1) de la note 7, p. 94 du Tome présent.

[48]) Voir le dernier alinéa de la démonstration du „Theor. VII", p. 135 du Tome présent.

Puisque OI est à IK comme le quadruple de GI avec GH est au double de GI avec le triple de GH, en prenant les triples des conséquents, OI sera à HI (qui est notamment le triple de IK) comme le quadruple de GI avec GH est au sextuple de GI avec le nonuple de GH. Et, par composition, OH est à HI comme le décuple des deux droites IG, GH est au sextuple de IG avec le nonuple de GH; ou bien, prenant les tiers, comme les dix tiers de la somme des deux droites GI, GH est au double de GI avec le triple de GH. Mais le rapport de la ligne GI à GH, c'est-à-dire, de BA à AM, est le même que celui de BD à DN, à cause des triangles semblables BAM, BDN. Donc aussi OH est à HI, comme $\frac{10}{3}$ de la somme des deux droites BD, DN est au double de BD avec le triple de DN, c'est-à-dire, comme $\frac{10}{3}$ NC est au diamètre EC avec le triple de DN. Mais plus petit que ce rapport est le rapport du segment AEB au triangle AEB*. Donc le rapport du dit segment au dit triangle est aussi moindre que celui de OH à HI, c'est-à-dire, que celui du triangle OHL au triangle HHL. Mais le triangle HHL est égal au triangle AEB. C'est ce que l'on démontre de la manière suivante. Le triangle GHL est égal au triangle DAB, parce que leurs bases et leurs hauteurs sont réciproquement égales. Et pour une raison semblable, puisque GI est égal à la droite AB, le triangle GIL sera égal à la somme des deux triangles DAE, DBE, c'est-à-dire au quadrilatère DAEB. Par conséquent il faut que le triangle HIL soit égal au triangle AEB, ce que nous disions. Le segment AEB sera donc au triangle AEB qui lui est inscrit dans un rapport moindre que le triangle OHL au même triangle AEB. Pour cette raison le triangle OHL sera plus grand que le segment AEB. Et dès lors le triangle OGL tout entier plus grand que le secteur DAEB. Mais la hauteur du triangle GLO est égale au rayon DB. Donc la base GO sera plus grande que l'arc AB. Ce qu'il fallait démontrer.

* d'après ce qui précède.



[Fig. 20.]

Or, il résulte évidemment de cela que de la circonférence toute entière on peut dire que, *si l'on inscrit dans le cercle deux polygones équilatéraux dont l'un a un nombre deux fois plus grand de côtés que l'autre, et que si l'on ajoute le tiers de la différence des périmètres au périmètre du polygone le plus grand, la droite ainsi composée sera plus petite que la circonférence du cercle. Mais si au même plus grand périmètre on ajoute une ligne qui est au dit tiers de la différence comme le quadruple du plus grand périmètre augmenté du plus petit périmètre est au double du plus grand avec le triple du plus petit, la droite ainsi composée dépassera la circonférence du cercle* [49]).

DB. Et jungatur DA, ducaturque diameter circuli CE quæ rectam AB bifariam dividat in N, arcum verò AB in E. Et jungantur AE, EB.

Quoniam igitur OI est ad IK ut quadrupla GI unà cum GH ad duplam GI cum tripla GH; sumptis consequentium triplis erit OI ad IH (hæc enim tripla est IK,) ut quadrupla GI unà cum GH ad sexcuplam GI cum noncupla GH. Et componendo, OH ad IH, ut decupla utriusque IG, GH ad sexcuplam IG cum noncupla GH: vel sumptis horum trientibus ut decem tertiæ duarum simul GI, GH ad duplam GI cum tripla GH. Est autem eadem ratio linearum GI ad GH, hoc est, BA ad AM, quæ BD ad DN, propter similes triangulos BAM, BDN. Ergo etiam OH ad IH, ut $\frac{10}{3}$ utriusque simul BD, DN ad duplam BD cum tripla DN; hoc est, ut $\frac{10}{3}$ NC ad diametrum EC cum tripla DN. Hac autem ratione minor est ratio portionis AEB ad AEB triangulum *. Ergo dictae portionis ad dictum triang. minor quoque ratio quam OH ad IH, hoc est, quam trianguli OHL ad triangulum IHL. Triangulum autem HIL æquale est triangulo AEB. Quod sic ostenditur. Triangulum enim GHL æquale est triangulo DAB, quoniam bases & altitudines reciprocè æquales habent. Similique ratione quoniam GI æqualis est rectæ AB, erit triangulum GIL æquale duobus simul triangulis DAE, DBE, hoc est, quadrilatero DAEB. Itaque triangulum HIL triangulo AEB æquari necesse est, quod dicebamus. Habebit itaque portio AEB ad triangulum sibi inscriptum AEB minorem quoque rationem quam triangulum OHL ad idem triangulum AEB. Quamobrem triangulum OHL portione AEB majus erit. Et totum proinde triangulum OGL majus sectore DAEB. Altitudo autem trianguli GLO æqualis est radio DB. Ergo basis GO major erit arcu AB. Quod erat ostendendum.

* *per praeced.*

Ex his autem manifestum est de tota quoque circumferentia pronunciari posse, quod, *Si circulo inscribantur polygona duo æquilatera, quorum alterum alterius sit duplo laterum numero, & differentiæ perimetrorum triens perimetro polygoni majoris adjungatur, composita ex his circuli circumferentiâ minor erit. Eidem verò majori perimetro si linea addatur quæ ad dictum differentiæ trientem sese habeat, sicut quadrupla perimetri majoris juncta perimetro minori, ad duplam majoris cum tripla minoris, composita circumferentiam circuli excedet* [49]).

[49]) Voir la seconde formule de la note 47.

PROBLÈME IV. PROPOS. XX.

Trouver le rapport de la circonférence au diamètre; et au moyen des cordes données infcrites dans un cercle donné trouver la longueur des arcs auxquels elles font fous-tendues.

Soit un cercle de centre D, dont le diamètre eft CB, et foit l'arc BA un fextant de la circonférence, dont nous menons la corde AB, ainfi que le finus AM. Si nous fuppofons donc que le demi-diamètre DB eft de 100000 parties, la corde BA en contiendra le même nombre. Mais AM fe compofera de 86603 parties, et pas une de moins (ce qui veut dire que fi l'on enlevait une partie ou une unité des 86603 on aurait moins que le dû) [50]), puifqu' elle eft la moitié du côté du triangle équilateral inferit dans le cercle.

De là l'excès de AB fur AM devient 13397, moindre que le vrai. Le tiers en eft 4465 $\frac{2}{3}$, ce qui ajouté à AB 100000, donne 104465 $\frac{2}{3}$ parties, ce qui eft moins que l'arc AB. Et ceci eft une première limite inférieure; dans la fuite nous en trouverons une autre, plus rapprochée que celle-là de la vraie valeur. Mais d'abord nous devons chercher auffi une limite fupérieure, conformément au theorème précédent.

Il y a donc trois nombres auxquels il s'agit de trouver une quatrième proportionnelle. Le premier eft égal au double des parties de AB et au triple de AM; il fera donc 459807, moindre que le vrai, (car on doit auffi prendre foin que ce nombre foit moindre ici; et de même avec les autres de la manière que nous l'indiquerons); le fecond eft égal au quadruple de AB et au fimple AM, foit 486603, plus grand que le vrai. Et le troifième eft le tiers de l'excès de AB fur AM, 4466, plus grand que le vrai. La quatrième proportionelle fera donc 4727, plus grande que le vrai, ce qui, ajouté à AB ou 100000 donne 104727, plus grand que le nombre de parties que contient l'arc AB, fextant de la périphérie *. Nous avons donc déjà trouvé la longueur de l'arc AB d'après une limite inférieure et une fupérieure, dont cependant la dernière eft de beaucoup la plus rapprochée de la vraie valeur, car le nombre 104719 eft le plus voifin du vrai.

** d'après ce qui précède.*

Mais au moyen de ces deux là nous obtiendrons une autre limite inférieure plus exacte que la première, en faifant ufage du précepte fuivant, qui réfulte d'un examen plus précis du centre de gravité [51]).

---

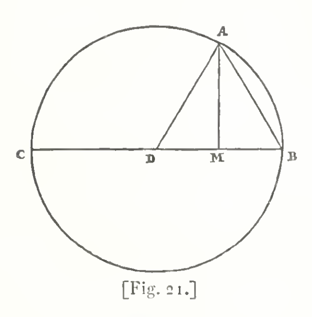
[50]) La phrase entre parenthèses à été ajoutée par Huygens en marge de l'exemplaire que nous possédons.

[51]) Les manuscrits et les lettres ne donnent aucun renseignement décisif sur la manière dont la

Problema IV. Propos. XX.

Circumferentiæ ad diametrum rationem inveſtigare; & ex datis inſcriptis in dato circulo invenire longitudinem arcuum quibus illae ſubtenduntur.

Eſto circulus centro D, cujus diameter CB, & ſit arcus BA ſextans circumferentiæ, cui ſubtenſa ducatur AB, itemque ſinus AM. Poſitâ igitur DB ſemidiametro partium 100000, totidem quoque erit ſubtenſa BA. AM verò partium 86603 non unâ minùs, (hoc eſt, ſi una pars ſive unitas auferatur ab 86603 ſiet minor debito) [50], quippe ſemiſſis lateris trianguli æquilateri circulo inſcripti.



[Fig. 21.]

Hinc exceſſus AB ſupra AM ſit 13397 vero minor. Cujus triens $4465\frac{2}{3}$ additus ipſi AB 100000, ſiunt partes $104465\frac{2}{3}$ minores arcu AB. Et hic primus eſt minor terminus, quo poſtea alium vero propiorem inveniemus. Priùs autem major quoque terminus ſecundùm Theorema præcedens inquirendus eſt.

Tres nimirum ſunt numeri quibus quartum proportionalem invenire oportet. Primus eſt partium duplæ AB & triplæ AM qui erit 459807, vero minor, (nam hoc quoque obſervandum ut minor ſit, idemque in cæteris prout dicetur) ſecundus quadruplæ AB & ſimplæ AM qui 486603 vero maj. Et tertius triens exceſſus AB ſupra AM, 4466 vero major. Itaque quartus proportionalis erit 4727 vero maj. quo addito ad AB 100000 ſit 104727, major numero partium, quas continet arcus AB, peripheriæ ſextans *. Jam igitur invenimus longitudinem arcus AB *per praeced.*
ſecundùm minorem majoremque terminum, quorum hic quidem longè propior vero eſt, cum vero proximus ſit 104719.

Sed ex utroque iſtorum alius minor terminus habebitur priore accuratior ſi utamur præcepto ſequenti, quod à diligentiori centrorum gravitatis inſpectione dependet [51]).

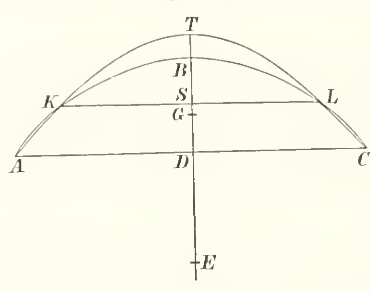
---

règle qui va suivre a été obtenue. Nous savons seulement par la Lettre N°. 185 du 1er avril 1654 (p. 279 du T. I) que sa démonstration dépendait, comme celle de la seconde partie du Théorème XVI*, de l'emploi d'une parabole.

Il était donc à supposer que la règle en question s'obtiendrait suivant la voie indiquée par les Théorèmes XIV et XV, en remplaçant toutefois la parabole HBK de la figure 18 par une autre

Ajoutez les quatre tiers de la différence des limites trouvées au double de la corde et au triple du sinus, et que dans le même rapport dans lequel se trouve la droite ainsi composée à trois et un tiers, ou $\frac{10}{3}$ fois la somme du sinus et de la corde, se trouve aussi l'excès de la corde sur le sinus à une certaine autre droite; celle-ci ajoutée au sinus constituera une droite plus petite que l'arc [52]).

dont le centre de gravité se trouverait nécessairement *au dessus* de celui du segment de cercle.



Or, la parabole qui, mieux qu'aucune autre, peut servir à ce but est celle ATC tracée dans la figure ci-jointe, où DS $= \frac{2}{5}$ TD. Elle permet de conclure qu'on a DG $<$ DS, où G et S représentent les centres de gravité du segment de cercle et de la parabole.

En effet, il est clair d'abord qu'une parabole passant par les points A et C est plus efficace que toute autre, qui passe par les mêmes points K et L et dont la partie au dessous de KL se trouverait entièrement à l'intérieur du segment de cercle (ce qui est nécessaire pour la démonstration); puisque pour ces dernières paraboles TD, donc aussi la distance du centre de gravité à la base AC, sera plus grande que pour la première.

Ensuite on voit aisément qu'on ne peut pas prendre les points K et L, avec avantage, ni plus bas, ni plus haut que dans la figure. En les prenant plus bas la distance du centre de gravité de la parabole à la base s'agrandit avec TD. En les prenant plus haut il est vrai que cette distance s'amoindrit; mais alors le centre de gravité de la parabole se trouve au dessous de la droite KL et on n'est plus sûr qu'il est encore au dessus du centre de gravité G du segment de cercle.

Il s'agit donc de calculer la limite inférieure pour la longueur de l'arc, et ensuite pour 2π, à laquelle on est conduit en employant la parabole de la figure. Nous avons trouvé ainsi la formule:

$$2\pi > p_n + \frac{10\,(p_{2n}^2 - p_n^2)}{6p_{2n} + 9p_n + \dfrac{27\,(p_{2n} - p_n)^2}{6p_{2n} + 9p_n}},$$

pour la déduction de laquelle nous renvoyons à un article de notre collaborateur M. F. Schuh à paraître dans les Archives Néerlandaises sous le titre: „Sur quelques formules aproximatives de la circonférence du cercle et sur la Cyclométrie de Huygens."

Or, en comparant cette limite avec celle qui suit de la règle de Huygens (voir la note 52), on s'aperçoit qu'elle est moins rapprochée; mais puisqu'elle est la meilleure de cette forme qu'on peut obtenir par le procédé que nous avons décrit, il faut que Huygens ait suivi une autre voie; si, du moins, il n'y pas question d'une faute de calcul.

Nous aurons d'ailleurs l'occasion de revenir sur ces approximations à propos d'une pièce de 1668 composée par Huygens pendant sa polémique avec Gregory sur la quadrature du cercle. Dans cette pièce, qu'on trouve aux pages 61—64 des „Adversaria olim D", Huygens arrive par une méthode différente à une formule, qui conduit à l'inégalité:

$$2\pi > p_n + \frac{10\,(p_{2n}^2 - p_n^2)}{6p_{2n} + 9p_n + \dfrac{3\,(p_{2n} - p_n)^2}{5p_{2n} + 5p_n}}.$$

Inventorum terminorum differentia sesquitertia jungatur duplæ subtensae & sinui triplo, & quam rationem habet ex his composita ad triplam sesquitertiam seu $\frac{10}{3}$ utriusque simul, sinus, subtensæque, eandem habeat subtensæ supra sinum excessus ad aliam quandam; Hæc ad sinum addita rectam constituet arcu minorem [52]).

c'est-à-dire, qui donne une limite inférieure plus rapprochée que les autres; puisqu' on a:

$$\frac{3}{5p_{2n}+5p_n}=\frac{6}{10p_{2n}+10p_n}<\frac{8}{6p_{2n}+9p_n}<\frac{27}{6p_{2n}+9p_n}.$$

[52]) On trouve pour la différence des limites indiquées dans le Théorème XVI l'expression:

$$\tfrac{1}{3}(a_{2n}-\tfrac{1}{2}a_n).\frac{2a_{2n}-a_n}{2a_{2n}+\frac{3}{2}a_n}.$$

La règle en question conduit donc à l'inégalité:

$$\frac{2\pi}{2n}>\tfrac{1}{2}a_n+\frac{\frac{10}{3}(a_{2n}^2-\frac{1}{4}a_n^2)}{\frac{4}{9}(a_{2n}-\frac{1}{2}a_n)\frac{2a_{2n}-a_n}{2a_{2n}+\frac{3}{2}a_n}+2a_{2n}+\frac{3}{2}a_n};$$

d'où l'on peut déduire:

$$2\pi>p_n+\frac{10(p_{2n}^2-p_n^2)}{6p_{2n}+9p_n+\frac{8(p_{2n}-p_n)^2}{6p_{2n}+9p_n}}.$$

Pour pouvoir comparer cette limite inférieure avec la suite (1) de la note 7, p. 94 du Tome présent, nous écrivons successivement:

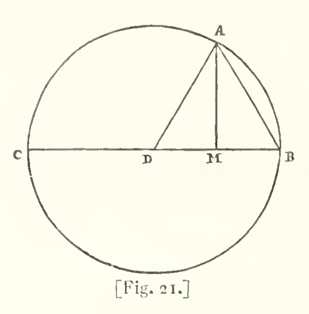
$$2\pi>p_{2n}-(p_{2n}-p_n)+\frac{60p_{2n}^2+150p_{2n}p_n+90p_n^2}{44p_{2n}^2+92p_{2n}p_n+89p_n^2}(p_{2n}-p_n)=p_{2n}+$$
$$+\frac{16p_{2n}^2+58p_{2n}p_n+p_n^2}{44p_{2n}^2+92p_{2n}p_n+89p_n^2}(p_{2n}-p_n)=p_{2n}+\tfrac{1}{3}(p_{2n}-p_n)\Big[1+$$
$$+\frac{(4p_{2n}+86p_n)(p_{2n}-p_n)}{44p_{2n}^2+92p_{2n}p_n+89p_n^2}\Big]=p_{2n}+\tfrac{1}{3}(p_{2n}-p_n)+\tfrac{2}{15}\frac{(p_{2n}-p_n)^2}{p_{2n}}\times$$
$$\times\frac{10p_{2n}^2+215p_{2n}p_n}{44p_{2n}^2+92p_{2n}p_n+89p_n^2}=p_{2n}+\tfrac{1}{3}(p_{2n}-p_n)+\tfrac{2}{15}\frac{(p_{2n}-p_n)^2}{p_{2n}}\Big[1+$$
$$+\frac{(-34p_{2n}+89p_n)(p_{2n}-p_n)}{44p_{2n}^2+92p_{2n}p_n+89p_n^2}\Big]=p_{2n}+\tfrac{1}{3}(p_{2n}-p_n)+\tfrac{2}{15}\frac{(p_{2n}-p_n)^2}{p_{2n}}+$$
$$+\tfrac{22}{675}\frac{(p_{2n}-p_n)^3}{p_{2n}^2}+\tfrac{22}{675}\frac{(p_{2n}-p_n)^3}{p_{2n}^2}\Big[-1+\tfrac{45}{11}\frac{(-34p_{2n}+89p_n)p_{2n}}{44p_{2n}^2+92p_np_{2n}+89p_n^2}\Big]=p_{2n}+$$
$$+\tfrac{1}{3}(p_{2n}-p_n)+\tfrac{2}{15}\frac{(p_{2n}-p_n)^2}{p_{2n}}+\tfrac{22}{675}\frac{(p_{2n}-p_n)^3}{p_{2n}^2}-\Big[\tfrac{2}{675}\frac{(2014p_{2n}-979p_n)(p_{2n}-p_n)^4}{(44p_{2n}^2+92p_{2n}p^n+89p_n^2)p_{2n}^2}\Big]$$

Ajoutons que la limite, mentionnée dans la note précédente, comme empruntée à la pièce. de 1668, amène l'inégalité:

$$2\pi>p_{2n}+\tfrac{1}{3}(p_{2n}-p_n)+\tfrac{2}{15}\frac{(p_{2n}-p_n)^2}{p_{2n}}+\tfrac{4}{75}\frac{(p_{2n}-p_n)^3}{p_{2n}^2}+$$
$$+\Big[\tfrac{4}{75}\frac{(-p_{2n}+16p_n)(p_{2n}-p_n)^4}{(11p_{2n}^2+23p_np_{2n}+16p_n^2)p_{2n}^2}\Big].$$

Des deux inégalités les trois premiers termes s'accordent avec ceux de la suite en question; mais le quatrième terme de la seconde se rapproche de beaucoup plus du quatrième terme de la suite, tout en y restant inférieur comme il fallait.

La limite inférieure était $104465\frac{2}{3}$; la fupérieure 104727; leur différence eft $261\frac{1}{3}$. Nous devons de nouveau trouver une quatrième proportionnelle à trois nombres. Le premier eft le double des parties de AB augmenté du triple de AM et des quatre tiers de la différence des limites; on trouve 460158, plus grand que le vrai. Le fecond eft les $\frac{10}{3}$ des deux AB et AM enfemble, 622008. plus petit que le vrai. Enfin le troifième eft l'excès de AB fur AM, 13397, plus petit que le vrai. La quatrième proportionnelle à ces nombres eft 18109, plus petite que le vrai. Si donc nous ajoutons ceci au nombre de parties de AM, $86602\frac{1}{2}$, moindre que le vrai, il vient $104711\frac{1}{2}$, moindre que l'arc AB. Ainfi donc le fextuple de ces parties, 628269, fera plus petit que la circonférence toute entière. Mais parce que 104727 de ces parties ont été trouvées plus grandes que l'arc AB, leur fextuple 628362 fera plus grand que la circonférence. De forte que le rapport de la circonférence au diamètre eft plus petit que celui de 628362, et plus grand que celui de 628269 à 200000. Ou bien plus petit que 314181 et plus grand que 314135 à 100000. D'où réfulte que ce rapport eft certainement plus petit que $3\frac{1}{7}$ et plus grand que $3\frac{10}{71}$. Et par là auffi eft réfutée l'erreur de Longomontanus [53]), qui écrivit que la périphérie eft plus grande que 314182 [54]) parties, dont le rayon contient 100000.



[Fig. 21.]

Suppofons maintenant que l'arc AB foit $\frac{1}{8}$ de la circonférence; alors AM, moitié du côté du carré inferit dans le cercle, fera de 7071068 parties, dont le rayon DB en contient 10000000, et pas une de moins. Tandis que AB, côté de l'octogone, eft de 7653668 parties et pas une de plus. Au moyen de ces données on trouvera, de la même façon que ci-devant, comme première limite inférieure de la longueur de l'arc AB 7847868. Puis comme limite fupérieure 7854066. Et de ces deux là de nouveau une limite inférieure plus précife 7853885. D'où il réfulte que le rapport de la périphérie au diamètre eft moindre que $31416\frac{1}{3}$ et plus grand que 31415 fur 10000.

Et comme la limite fupérieure 7854066 s'écarte moins de la vraie longueur de l'arc que 85 parties (l'arc AB, en effet, d'après ce que nous avons prouvé plus haut [55]), eft plus grand que 7853981), et que 85 parties font moins que deux fecondes, c'eft-à-dire que $\frac{2}{1296000}$ de la circonférence, car toute la circonférence a plus de 60000000 de ces parties; il eft donc clair que, fi d'un triangle rectangle nous cherchons les angles au moyen des côtés donnés, de la manière dont nous avons cherché cette limite fupérieure un peu avant, jamais nous ne nous trompe-

[53]) Voir, sur Longomontanus et son ouvrage de 1644 sur la quadrature du cercle, les notes 4 et 5,

Minor terminus erat $104465\frac{2}{3}$. Major 104727. differentia horum eſt $261\frac{1}{3}$. Eſtque rurſus tribus numeris inveniendus quartus proportionalis. Primus eſt partium duplæ AB & triplæ AM & ſeſquitertiæ terminorum differentiæ, 460158 vero major. Secundus $\frac{10}{3}$ utriuſque ſimul AB, AM, 622008 vero minor. Tertius denique exceſſus AB ſupra AM, 13397 vero min. Quibus quartus proportionalis eſt 18109 vero min. Hic igitur additus numero partium AM $86602\frac{1}{2}$ vero min. fiunt $104711\frac{1}{2}$ minores arcu AB. Quare ſexcuplum earum, 628269 minus erit circumferentiâ totâ. At quoniam 104727 majores inventæ ſunt arcu AB, earum ſexcuplum 628362 circumferentiâ majus erit. Itaque circumferentiæ ad diametrum ratio minor eſt quam 628362, major autem quam 628269 ad 200000. Sive minor quam 314181, major autem quam 314135 ad 100000. Unde conſtat minorem utique eſſe quam triplam ſeſquiſeptimam, & majorem quam $3\frac{10}{71}$. Quin etiam Longomontani [53]) error per hæc refutatur, qui ſcripſit peripheriam majorem eſſe partibus 314182 [54]) qualium rad. 100000.

Eſto nunc arcus AB $\frac{1}{8}$ circumferentiæ, & erit AM, ſemiſſis lateris quadrati circulo inſcripti, partium 7071068, non unâ minùs, qualium radius DB 10000000. AB verò latus octanguli partium 7653668 non unâ majus. Quibus datis ad ſimilitudinem præcedentium invenietur primus minor terminus longitudinis arcus AB 7847868. Deinde major terminus 7854066. Et ex utroque rurſus terminus minor accuratior 7853885. Unde conſtat peripheriæ ad diametrum rationem minorem haberi quam $31416\frac{1}{3}$, majorem autem quam 31415 ad 10000.

Et quum terminus major 7854066 à vera arcus AB longitudine minus diſtet quam partibus 85; (Eſt enim arcus AB, per ea quæ ſupra oſtendimus [55]), major quam 7853981) partes autem 85 efficiant minus quam duos ſcrupulos ſecundos, hoc eſt, quam $\frac{2}{1296000}$ circumferentiæ, nam tota earundem plures habet quam 60000000: Hinc manifeſtum eſt, ſi trianguli rectanguli angulos quæramus ex datis lateribus, eo modo quo majorem iſtum terminum paulò antè, nunquam duobus

---

p. 176 du T. I. Déjà en 1612 il publia l'ouvrage qui suit: „Cyclometria ex Lunulis reciprocè demonstrata, unde tam Areae, quàm Perimetri circuli exacta dimensio, & in numeros diductio seqvuta est, haetenus ab omnibus Mathematicis unicè desiderata. Ad Christianum Qvartum Daniae & Septemtrionis Regem. Inventore Christiano S. Longomontano Regio Mathematum Professore. Hafniae Typis Henrici Waldkirchij. Anno CIↃ IↃCXII."

La fausse quadrature qu' il y développe amène à la page 55 la valeur numérique $\pi = 3,14185959069768\ldots$; elle est différente de celle de l'ouvrage de 1644, laquelle le conduit à la page 24 au nombre $3,141859604427\ldots$

[54]) Dans l'exemplaire que nous possédons, ce dernier chiffre a été changé à la plume, probablement par Huygens lui-même. On y lit 314185.

[55]) Il s'agit du dernier alinéa du „Problema I. Prop. X", p. 143 du Tome présent, d'après lequel la circonférence contient plus de 62831852 des parties mentionnées dans le texte; dont le huitième excède 7853981.

rons de plus de deux fecondes; même fi les côtés autour de l'angle droit font égaux entre eux, comme ils l'étaient ici dans le triangle DAM.

Mais fi le rapport du côté DM à MA eft tel que l'angle ADM ne dépaffe pas $\frac{1}{4}$ d'un angle droit, l'erreur ne fera pas même d'une tierce. En effet, pofant l'arc AB égal à $\frac{1}{16}$ de la circonférence, AM fera la moitié du côté de l'octogone équilatéral infcrit dans le cercle, et égal à 382683433 parties et pas une de moins; tandis que AB fera le côté du polygone de feize côtés, et contiendra donc 390180644 parties et pas une de plus, le rayon DB contenant 1000000000 de ces parties. On trouve par là une première limite inférieure de la longueur de l'arc AB de 392679714 parties. Et la limite fupérieure eft 392699148. Et de là de nouveau une limite inférieure 392699010. Or, il réfulte de ce que nous avons démontré plus haut [56]) que l'arc AB, $\frac{1}{16}$ de la circonférence, eft plus grand que 392699081 parties, lefquelles la limite fupérieure dépaffe de 67 parties. Mais celles-ci font moins qu'une tierce, c'eft-à-dire que $\frac{1}{7776000000}$ de toute la circonférence, puifque celle-ci eft plus grande que 6000000000.

Puis, des nouvelles limites que nous venons de trouver le rapport de la circonférence au diamètre fortira plus petit que 3141593 $\frac{1}{5}$, mais plus grand que 3141592 à 1000000.

Et si nous prenons un arc AB égal à $\frac{1}{60}$ de la circonférence, foit à 6 parties dont elle en contient toute entière 360, AM fera la moitié du côté du polygone (infcrit) [57]) à 30 angles, formé de 10452846326766 parties dont le rayon en a 100000000000000, et pas une de moins. Et AB eft le côté du polygone (infcrit) [57]) de 60 angles, 10467191248588 et pas une de plus. Au moyen de ces données on trouvera l'arc AB d'après la première limite inférieure 10471972889195. D'après la fupérieure 10471975512584. Et de là l'autre limite inférieure 10471975511302. D'où il réfulte que le rapport de la périphérie au diamètre eft moindre que 31415926538, mais plus grand que 31415926533 à 10000000000.

S'il fallait chercher ces limites par l'addition des côtés des polygones infcrit et circonfcrit, il faudrait aller prefque jufqu à quatre cent mille côtés [58]). Car au moyen du polygone à 60 angles infcrit et circonfcrit on prouve feulement que le rapport de la périphérie au diamètre est moindre que 3145 à 1000 et plus grand que 3140. Ainfi donc le nombre de chiffres vrais fourni par notre calcul paraît être trois fois plus grand et même plus. Mais fi quelqu' un en fait l'expérience, il verra que la même chofe arrive toujours avec les polygones suivants: nous n'en ignorons pas la raifon, mais elle demanderait une explication trop longue [59]).

D'ailleurs je crois qu'il eft fuffifamment clair comment, étant données d'autres infcrites quelconques, on peut trouver par les méthodes expofées la longueur des arcs auxquels elles font fous-tendues. Car, fi elles font plus grandes que le côté du carré infcrit, on devra chercher la longueur de l'arc reftant à la demicirconférence, dont la corde eft alors auffi donnée. Mais on doit auffi favoir trouver les cordes des moitiés des arcs, lorfque la corde de l'arc entier eft donnée.

ſcrupulis ſecundis aberraturos; etiamſi æqualia inter ſe fuerint latera circa angulum rectum, veluti hic erant in triangulo DAM.

Si verò ea ſit ratio lateris DM ad MA, ut angulus ADM non excedat $\frac{1}{4}$ recti; non unius tertii ſcrupuli error erit. Poſito enim arcu AB $\frac{1}{16}$ circumferentiæ, erit AM ſemiſſis lateris octanguli æquilateri circulo inſcripti partium 382683433, non unâ minùs. AB verò latus ſexdecanguli 390180644 non unâ ampliùs, qualium radius DB 1000000000. Unde primus minor terminus longitudinis arcus AB invenitur partium 392679714. Terminus autem major 392699148. Et ex his minor rurſus 392699010. Conſtat autem ex ſupra demonſtratis [56]) arcum AB $\frac{1}{16}$ peripheriæ, majorem eſſe quam 392699081, quas terminus major ſuperat partibus 67. Hæ autem minus efficiunt uno ſcrupulo tertio, hoc eſt, $\frac{1}{7776000000}$ totius circumferentiæ, quoniam ea major eſt utique quam 6000000000.

Porrò ex noviſſimis terminis inventis orietur ratio circumferentiæ ad diametrum minor quam $3141593\frac{1}{3}$, major autem quam 3141592 ad 1000000.

Quod ſi $\frac{1}{60}$ circumferentiæ ponatur arcus AB, ſeu partium 6 qualium tota 360: Erit AM ſemiſſis lateris trigintanguli (inſcripti) [57]) partium 10452846326766, non unâ minùs, qualium radius 100000000000000. Et AB latus ſexagintanguli (inſcripti) [57]) 10467191248588 non unâ amplius. Invenieturque ex his arcus AB ſecundùm primum minorem terminum 10471972889195. Secundùm majorem 10471975512584. Et ex his minor alter terminus 10471975511302. Unde efficitur peripheriæ ad diametrum ratio minor quam 31415926538, major autem quam 31415926533 ad 10000000000.

Quos terminos ſi ex additis inſcriptorum & circumſcriptorum polygonorum lateribus inquirendum eſſet ferè ad laterum quadringenta millia deveniendum [58]). Nam ex ſexagintangulo inſcripto circumſcriptoque hoc tantùm probatur, minorem eſſe rationem peripheriæ ad diametrum quam 3145 ad 1000, majorem autem quam 3140. Adeo ut triplum & ampliùs verarum notarum numerum noſtro ratiocinio productum appareat. Idem verò in ulterioribus polygonis ſi quis experiatur ſemper evenire cernet: non ignota nobis ratione, ſed quæ longiori explicatione indigeret [59]).

Porrò autem quomodo, datis quibuſcunque aliis inſcriptis arcuum quibus ſubtenduntur longitudo per hæc inveniri queat ſatis puto manifeſtum. Si enim quadrati inſcripti latere majores ſunt, longitudo arcus ad ſemicircumferentiam

[56]) Voir toujours le lieu cité dans la note précédente.

[57]) Les mots entre parenthèses furent ajoutés en marge par Huygens dans l'exemplaire que nous possédons.

[58]) En appliquant les relations approchées de la note 7, p. 94 du Tome présent, on trouve que des polygones de 240000 côtés suffiraient à déduire ces limites à l'aide de la méthode Archimédienne.

[59]) Voir, à ce propos, la note 15, p. 142 du Tome présent.

Et de cette manière, ſi nous voulons faire uſage des biſections, nous pourrons connaître ſans difficulté pour toute corde la longueur de ſon arc, auſſi rapprochée que nous voulons. Ceci eſt utile pour l'examen des tables des ſinus. Et de même pour leur compoſition; car connaiſſant la corde d'un certain arc, on peut déterminer auſſi avec une préciſion ſuffiſante celle de l'arc qui eſt un peu plus grand ou un peu plus petit.

reliqui inquirenda eſt, cujus tum quoque ſubtenſa datur. Sciendum autem & dimidiorum arcuum ſubtenſas inveniri cum totius arcus ſubtenſa data eſt. Atque hâc ratione ſi biſectionibus uti placebit, poterimus ad omnem ſubtenſam, arcus ipſius longitudinem quamlibet veræ propinquam non difficulter cognoſcere. Utile hoc ad ſinuum tabulas examinandas. Imo ad componendas quoque : quia cognitâ arcus alicujus ſubtenſâ, etiam ejus qui paulò major minorve ſit ſatis accuratè definiri poteſt.

CHRISTIAAN HUYGENS, FILS DE CONSTANTIN.

CONSTRUCTIONS DE CERTAINS

PROBLÈMES CÉLÈBRES.

PROBL. I.

Couper une ſphère donnée par un plan de manière que les ſegments ſoient entre eux dans un rapport donné [1]).

Archimède a réſolu ce problème dans le livre 2 de ſon traité de la Sphère et du Cylindre [2]). Mais il ſemble qu'il n'a pas expoſé la conſtruction qu'il avait promiſe, à moins que ne ſoit de lui celle qu' Eutocius inſéra dans ſes Commentaires, l'ayant trouvée dans un livre très vieux [3]). Or, elle y est effectuée par l'interſection d'une parabole et d'une hyperbole comme celle dont Dionyſidore eſt l'auteur [4]), laquelle cependant diffère de la précédente. Outre celles-là Eutocius donne encore une troiſième [5]), tirée du livre de Dioclès sur les Miroirs ardents, laquelle demande le tracé d'une hyperbole et d'une ellipſe. Quant à la nôtre, que nous décrirons ici, elle exige la triſection de l'angle; et cette façon de conſtruire paraît pour les problèmes ſolides en quelque ſorte la plus ſimple, et la plus appropriée à l'usage.

Soit donc donnée une ſphère [Fig. 1] dont le centre eſt M, le diamètre CA. Et ſoit donné le rapport de la ligne S à T, d'une plus grande à une plus petite. Que l'on ſe figure la ſphère coupée par un plan ſuivant le diamètre AC et ſoit CBAD le cercle le plus grand dans cette ſphère. Et que l'on prolonge des deux côtés le diamètre CA et que chacun des deux prolongements CH et AE ſoit égal au demi-diamètre. Et que l'on diviſe toute la droite HE au point Q, de façon que EQ ſoit à QH comme S à T. Que l'on place maintenant contre la circonférence la droite

---

[1]) Consultez, sur l'historique de ce problème, la page 102 de l'„Avertissement". La solution qui va suivre se retrouve dans une forme modifiée aux p. 16—18 du Tome présent sous la date du 31 janvier 1652.

CHRISTIANI HUGENII C. F.

ILLVSTRIVM QVORVNDAM

PROBLEMATVM CONSTRVCTIONES.

Probl. I.

Datam ſphæram plano ſecare, ut portiones inter ſe rationem habeant datam [1]).

Hoc Archimedes problema reſolvit lib. 2. de Sphæra & Cylind. [2]) Compoſitionem autem promiſſam non videtur explicuiſſe, niſi ipſius eſt illa quam Eutocius in vetuſto quodam libro repertam commentariis ſuis inſeruit [3]). Ea verò paraboles & hyperboles interſectione perficitur, uti & illa cujus Dionyſidorus autor eſt [4]), quæ tamen à priori differt. Præter has tertiam quoque adfert Eutocius [5]) è Dioclis de Pyriis libro, quæ hyperboles & ellipſis deſcriptionem requirit. Noſtra autem quam hic conſcribemus anguli triſectionem poſtulat; Et hæc conſtruendi ratio in ſolidis problematibus quodammodo ſimpliciſſima videtur, atque ad uſum maximè accommodata.

Eſto igitur data ſphæra [Fig. 1] cujus centrum M, diameter CA. Et data ſit proportio lineæ S ad T majoris ad minorem. Intelligatur ſecari ſphæra plano ſecundum AC diametrum, ſitque maximus in ea circulus CBAD. Et producatur utrimque diameter CA, & ponatur ſemidiametro æqualis utraque harum CH, AE. Et dividatur tota HE in Q, ut ſit EQ ad QH ſicut S ad T. Ipſi autem MQ æqualis

---

[2]) Voir la note 3, p. 3 du Tome préſent.
[3]) Conſultez les notes 16 et 17, p. 12 du Tome préſent.
[4]) Voir p. 37—38 du texte Latin des „Commentarii Eutocii" de l'édition de Bâle, citée note 3, p. 274 du T. XI, (Heiberg, III, p. 181—188).
[5]) Voir p. 38—42 de l'édition de Bâle, (Heiberg, III, p. 189—209).

AR, égale à la droite MQ. Et que l'on prenne MN égale à celle qui ſous-tend la troiſième partie de l'arc AR. Enfin que par le point N on mène le plan KL qui ſoit à angles droits ſur le diamètre CA. Je dis que ce plan coupe la ſphère de telle manière, que le ſegment dont A eſt le ſommet eſt à celui dont le ſommet eſt C dans le rapport de S à T [6]).

En effet, coupons la ſphère par un plan BD paſſant par le centre M et parallèle à KL, et joignons KM, ML; et imaginons un cône ayant comme baſe le cercle formé par la ſection KL, mais dont le ſommet eſt en M. Comme le carré CM au carré MN, de même ſoit MN à NO, quant à la longueur. On aura donc, par converſion des rapports, que le carré CM, ou le carré KM, eſt au carré KN (car le carré KN eſt l'excès du carré KM ſur le carré MN) comme la droite NM eſt à MO. Or, comme le carré KM, c'eſt-à-dire le carré BM, au carré KN, ainſi le cercle autour du diamètre BD eſt à celui décrit autour du diamètre KL. Donc auſſi ce cercle là ſera à celui-ci comme NM à MO. Et par conſéquent le cône KML ſera égal à celui dont la baſe eſt le cercle autour
*15.12. *Élém.*[7]) du diamètre BD, mais dont la hauteur eſt MO *. Mais ce cône eſt à l'hémiſphère BCD, c'eſt-à-dire au cône qui a comme baſe le même cercle autour
*32.1. *Archim. du Sphère et du Cyl.*[8]) du diamètre BD, et comme hauteur MH *, dans le même rapport que MO à MH. Donc auſſi le cône KML ſera à l'hémisphère BCD comme MO à MH. Et inverſement.

Mais enſuite, puiſque l'hémiſphère BCD eſt au ſecteur ſolide MKCL comme
*42. 1. *Arch. du Sphère et du Cyl.*[9]) la ſuperficie ſphérique de celle-là eſt à la ſuperficie ſphérique de celui-ci *, c'eſt-à-dire comme MC à CN †, par converſion des rapports, l'hémisphère BCD
† 3. 2. *Arch. du Sphère et du Cyl.*[10]) ſera à la partie qui en reſte après enlèvement du ſecteur MKCL, comme CM à MN: ou bien, après en avoir pris les doubles, comme HM à OQ. Car que OQ eſt le double de MN, c'eſt ce que nous montrerons plus tard. Mais on a démontré que l'hémiſphère BCD eſt au cône KML comme HM à MO. Donc déjà l'hémiſphère BCD ſera à toute la partie compriſe entre les plans BD,
*24.5. *Élém.*[11]) KL comme HM aux droites QO, OM enſemble *, c'eſt-à-dire à MQ. C'eſt pourquoi, par converſion des rapports, l'hémiſphère BCD ſera au ſegment KCL, comme MH à HQ. Et ſi l'on prend les doubles des antécédents, la ſphère toute

[6]) La construction exposée est sans doute une modification de celle qui fut communiquée le 9 août 1653 à Kinner à Löwenthurn, laquelle elle-même ne diffère pas essentiellement de celle inventée le 31 janvier 1652 (voir la note 1).

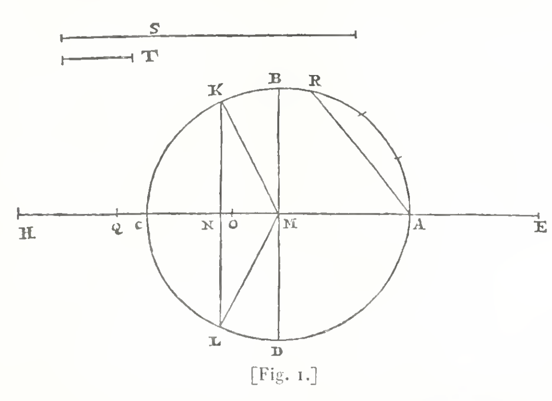
Consultez là-dessus la note 4, p, 16 du Tome présent. Ici encore il est facile de montrer que la corde, dont l'arc est divisé en trois parties égales, aura la longueur $\frac{S-T}{S+T}$. AC.

[7]) Voir la note 10, p. 11 du Tome présent.

[8]) Voir la note 7, p. 17 du Tome présent.

[9]) Voir la note 11, p. 11 du Tome présent.

ponatur ad circumferentiam recta AR. Et ei quæ tertiam partem ſubtendit arcus AR, æqualis ſumatur MN. Et per N punctum ducatur planum KL quod diametro CA ſit ad angulos rectos. Dico hoc ſphæram ſic ſecare, ut portio cujus A vertex eſt ad eam cujus vertex C rationem habeat quam S ad T [6]).



[Fig. 1.]

Secetur enim ſphæra per centrum M plano BD ipſi KL parallelo, & jungantur KM, ML; & intelligatur conus baſin habens circulum factum ſectione KL, verticem vero M. Et ſicut quadratum CM ad quadratum MN, ita ſit MN ad NO longitudine. Erit igitur per converſionem rationis ut quadratum CM ſive quadr. KM ad quadratum KN (eſt enim quadr. KN exceſſus quadrati KM ſupra quadr. MN) ita linea NM ad MO. Sicut autem quadr. KM, hoc eſt, quadr. BM ad quadr. KN, ita eſt circulus circa diametrum BD ad eum qui circa diametrum KL. Ergo quoque ille circulus ad hunc ſeſe habebit ut NM ad MO. Ac proinde conus KML æqualis erit cono cujus baſis circulus circa diametrum BD, altitudo MO *. Hic autem conus ad hemiſphæram BCD, hoc eſt, ad conum qui baſin habeat eundem circulum circa BD diametrum, & altitudinem MH *, eam habet rationem quam MO ad MH. Itaque & conus KML erit ad hemiſphæram BCD ſicut MO ad MH. Et invertendo.

* 15.12. *Elem.* [7])

* 32.1. *Archim. de Sphær. & Cylin.* [8])

Porro autem quoniam hemiſphæra BCD eſt ad ſectorem ſolidum MKCL ſicut ſuperficies illius ſphærica ad ſphæricam hujus ſuperficiem *, hoc eſt, ut MC ad CN †. Erit per converſionem rationis hemiſphæra BCD ad partem ſui quæ remanet dempto ſectore MKCL, ſicut CM ad MN: vel ſumptis horum duplis ut HM ad OQ. Quod enim OQ dupla ſit ipſius MN poſtea oſtendemus. Fuit autem oſtenſum, quod hemiſphæra BCD ad conum KML ſicut HM ad MO. Ergo jam hemiſphæra BCD ad totam portionem inter plana BD, KL contentam erit ut HM ad utramque ſimul QO, OM *, hoc eſt, ad MQ. Quare & per converſionem rationis, erit hemiſphæra BCD ad portionem KCL, ut MH ad HQ. Et ſumptis

* 42.1. *Archim. de Sphær. & Cyl.* [9])

† 3.2. *Archim. de Sphær. & Cyl.* [10])

* 24.5. *Elem.* [11])

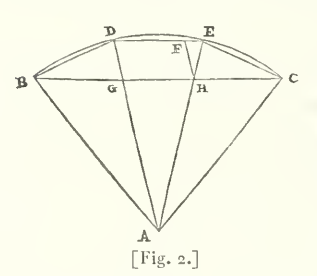
[10]) Voir la note 9, p. 17 du Tome présent.

[11]) Voir la note 28, p. 312 du Tome XI et de même la note 13, p. 11 et 12 du Tome présent.

entière eſt au ſegment KCL comme EH à HQ. Et par partage, le ſegment KAL eſt au ſegment KCL comme EQ à QH, c'eſt-à-dire comme S à T. Ce qui était à faire. Quant à ce qui a été dit, que OQ eſt le double de MN, voici comment on le prouve. Puiſque comme le carré CM au carré MN ainſi MN eſt à NO en longueur, et que QM eſt égal à la corde de l'arc AR dont le tiers eſt ſous-tendu par MN, pour cette raiſon les deux droites QM et NO enſemble feront égales au triple de MN, ainſi que cela ſe démontre par le lemme ſuivant. Et par conſéquent la portion commune ON étant enlevée, la droite QM ſeule ſera égale au double de NM avec MO. Mais cette même droite QM eſt égale aux deux droites QO, OM enſemble, donc il reſſort que le double de MN eſt égal à la droite OQ.

Lemme.

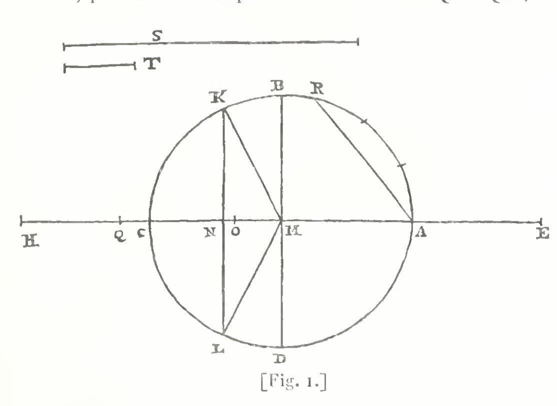
Lorſqu'un arc de circonférence eſt coupé en trois parties égales, l'enſemble des trois droites qui ſont ſous-tendues aux parties égales eſt égal à la ſous-tendue de l'arc entier avec une droite qui eſt à la ſous-tendue du tiers comme le carré de celle-ci au carré du demi-diamètre. Suppoſons que l'arc du ſecteur ABC ſoit diviſé en trois parties égales par les points D, E; et que les droites BD, DE, EC ſoient ſous-tendues à ces parties et la droite BC à l'arc tout entier. Puis joignons DA, EA et ſuppoſons que ces droites coupent la corde BC aux points G et H. Soit enfin HF parallèle à GD.



[Fig. 2.]

Ainſi donc la circonférence BDE eſt double de la circonférence EC, mais l'angle EAC qui repoſe ſur celle-ci eſt formé au centre, tandis que l'angle BCE repoſant ſur celle-là eſt formé ſur la circonférence. Pour cette raiſon l'angle BCE, c'eſt-à-dire l'angle HCE dans le triangle HCE, eſt égal à l'angle CAE dans le triangle CAE. Mais l'angle en E eſt commun à tous deux; donc les dits triangles ſont ſemblables entr'eux; et comme AE à EC ainſi EC ſera à EH. Donc le rapport de AE à EH, c'eſt-à-dire de DE à EF, eſt la deuxième puiſſance du rapport de AE à EC, et par conſéquent le même que celui du carré AE au carré EC ou ED. Donc, en permutant, FE ſera à ED comme le carré ED eſt au carré EA. A cauſe de cela il s'agit de démontrer, que les trois droites BD, DE, EC enſemble égalent la corde BC avec ce même EF; ce qui eſt tout à fait manifeſte, car CE eſt égal à CH, BD égal à BG, et DE à l'enſemble des deux droites GH et FE. Donc la propoſition eſt établie.

antecedentium duplis, ſphæra tota ad portionem KCL ut EH ad HQ. Et dividendo, portio KAL ad portionem KCL ut EQ ad QH, hoc eſt ut S ad T. Quod erat faciendum. Quod autem dictum fuit OQ duplam eſſe ipſius MN, ſic fiet manifeſtum. Quia enim ut quadratum CM ad quadr. MN ita eſt MN ad NO longitudine: Eſt autem QM æqualis ſubtenſæ arcus AR cujus trienti ſubtenditur MN. Erunt propterea duæ ſimul QM & NO æquales triplæ MN, uti ſequenti lemmate demonſtratur. Quamobrem ablata communi ON, erit ſola QM æqualis duplæ NM & ipſi MO. Sed eadem QM æqualis eſt duabus ſimul his QO, OM, ergo apparet duplam MN æquari ipſi OQ.



[Fig. 1.]

Lemma.

Si Circumferentiæ arcus in tria æqualia ſecetur, tres ſimul rectæ quæ æqualibus partibus ſubtenduntur, æquantur ſubtenſæ arcus totius & ei quæ ad ſubtenſam trientis ſeſe habeat, ſicut hujus quadratum ad quadratum ſemidiametri. Arcus ſectoris ABC [Fig. 2] in tria æqualia diviſus ſit punctis D, E. Et ſubtendantur partibus rectæ BD, DE, EC; & toti arcui linea BC. Porro jungantur DA, EA, atque interſecent ſubtenſam BC in punctis G & H. Sitque HF parallela GD.

Quoniam igitur circumferentia BDE dupla eſt circumferentiæ EC, angulus autem huic inſiſtens EAC ad centrum conſtitutus, qui verò illi inſiſtit angulus BCE ad circumferentiam. Erit propterea angulus BCE, hoc eſt, angulus HCE in triangulo HCE æqualis angulo CAE in triangulo CAE. Sed angulus ad E utrique eſt communis; itaque ſimiles inter ſe ſunt dicti trianguli: Eritque ut AE ad EC ita EC ad EH. Ratio igitur AE ad EH hoc eſt DE ad EF, duplicata eſt rationis AE ad EC, ac proinde eadem quæ quadrati AE ad quadr. EC ſeu quadr. ED. Erit igitur invertendo FE ad ED ſicut quadr. ED ad quadr. EA. Quamobrem oſtendendum eſt, tres ſimul BD, DE, EC æquari ſubtenſæ BC atque ipſi EF. quod ſane manifeſtum eſt; nam CE eſt æqualis CH; BD æqualis BG; DE vero utriſque ſimul GH, & FE. Ergo conſtat propoſitum.

Nous avons ſuppoſé, il eſt vrai, que l'arc BC eſt moindre que la demi-circonférence, parce que dans la conſtruction du problème en queſtion cela eſt toujours ainſi. Mais le lemme s'applique à des arcs quelconques, et pour des arcs plus grands que la demi-circonférence la démonſtration eſt peu différente. [12])

Probl. II.

Trouver un cube double d'un cube donné [13]).

Pour ce problème nous propoſerons d'abord une conſtruction imparfaite, utile pour les conſtructions mécaniques, puis nous en fournirons une exacte, qui toutefois ne s'effectue qu'en eſſayant à pluſieurs repriſes. En effet, les problèmes ſolides exigent toujours ou ceci ou le tracé de ſections coniques.

Soit donc donné un cube dont le côté eſt AB; il s'agit de trouver le côté d'un cube double.

Décrivons avec le rayon BA un demi-cercle AFC. Suppoſons que l'arc AF ſoit le tiers de la demi-circonférence, CD le quart; et menons CF, AD, dont l'interſection eſt au point E. AE ſera le côté du cube cherché; le dépaſſant toutefois d'une petite quantité, qui eſt moindre que ſa $\frac{1}{2000}$ partie, ainſi qu'on peut l'examiner facilement par les nombres. AE eſt, en effet, la ſécante d'un angle de 37 degrés 30 minutes, et eſt donc plus grande que 12600 parties dont AF ou AB en a 10000. Mais elle eſt moindre que 12605. Donc, comme le cube ſur 12600 eſt plus grand que le double de celui conſtruit ſur AB 10000, le cube ſur AE ſera plus grand que le double du cube ſur AB. D'autre part, puiſque AE eſt plus grand que 12600 parties, $\frac{1}{2000}$ AE ſera plus grand que 6 parties. Mais toute la droite AE eſt plus petite que 12605. Donc, enlevant de AE la deux-millième partie d'elle-même, le reſte ſera plus petit que 12599 parties; car il en reſte autant lorſqu'on déduit 6 de 12605. Or, le cube ſur 12599 eſt plus petit que le double du cube ſur 10000. Donc auſſi à plus forte raiſon AE diminuée de la deux-millième partie d'elle-même donne un cube plus petit que celui qui ſerait le double du cube de côté AB.

Puis, pour la conſtruction exacte, CF doit être tracée comme d'abord; mais AD de telle façon, que la ſous-tendue CD ſoit égale à la partie découpée EF. Et ceci poſé, je dis que le cube AE eſt double de celui formé ſur AB.

Prolongeons en effet CA, et ſoit AG égale à AE. A cauſe des triangles ſemblables EC eſt donc à CD, c'eſt-à-dire EF, comme EA à AF, c'eſt-à-dire comme

[12]) Cette remarque manque dans la rédaction du 31 janvier 1652 (p. 16—18 du Tome présent), où le lemme et sa démonstration se retrouvent.

[13]) Comparez, pour ce problème, les pages 45—48 du Tome présent où on retrouvera, sous les dates du 1er et du 2 mars 1652, d'abord la solution exacte dans une rédaction peu différente, puis la construction approximative avec une démonstration bien plus prolixe.

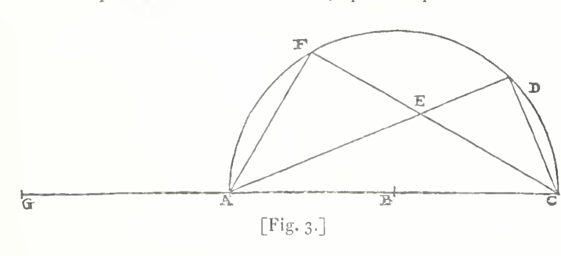
Sumpſimus autem arcum BC ſemicircumferentiâ minorem quoniam in conſtructione problematis ejuſmodi ſemper invenitur. Nam lemma ad quoſvis arcus pertinet, eſtque in ſemicircumferentiâ majoribus demonſtratio parum diverſa [12]).

Probl. II.

Cubum invenire dati cubi duplum [13]).

Ad hoc imperfectam primò conſtructionem proponemus ad mechanicen utilem; deinde accuratam ſubjiciemus, quæ tamen non niſi ſæpius tentando perficiatur. Etenim ſolida problemata omnia vel iſthic [14]) exigunt vel ſectionum conicarum deſcriptionem.

Sit itaque datus cubus latus AB, oporteatque invenire latus cubi dupli.



[Fig. 3.]

Radio BA ſemicirculus deſcribatur AFC. Sitque arcus AF ſemicircumferentiæ triens, CD vero quadrans; & ducantur CF, AD, quarum interſectio ad E punctum. Erit AE latus cubi quæſiti; exiguo tamen excedens, quodque minus ſit $\frac{1}{2000}$ ſui parte, ut facile numeris explorari poteſt. Fit enim AE ſecans anguli p. 37. ſcr. 30. quæ proinde major eſt partibus 12600 qualium AF vel AB 10000. Minor autem quam 12605. Itaque cum cubus ex 12600 ſit major quam duplus ejus qui ex AB 10000, erit & cubus AE major duplo cubo ex AB. Rurſus quia AE major eſt partibus 12600 erit $\frac{1}{2000}$ AE major part. 6. Tota verò AE minor eſt quam 12605. Ergo auferendo ab AE partem biſmilleſimam ſui ipſius reliqua minor erit partibus 12599, tot enim ſuperſunt cum ex 12605 deducuntur 6. Atqui cubus ex 12599 minor eſt duplo cubo ex 10000. Ergo omnino quoque AE diminuta parte ſui biſmilleſima cubum minorem producet quam ſit duplus cubus à latere AB.

Porrò ad perfectam conſtructionem, CF quidem uti priùs ducenda eſt: AD verò ſic, ut ſubtenſa CD æqualis ſit abſciſſæ EF. Etenim his poſitis dico cubum AE ejus qui ex AB duplum exiſtere.

Producatur enim CA, & ſit ipſi AE æqualis AG. Propter triangulos ſimiles igitur eſt EC ad CD, hoc eſt, EF ut EA ad AF, hoc eſt, ut GA ad AB. Et

[14]) Dans l'exemplaire que nous possédons le mot „isthic" a été changé à la plume par Huygens en „hoc".

GA à AB. Et par compoſition, CF eſt à FE comme GB à BA ou AF. Puis, permutant, CF eſt à GB comme EF à FA. Par conſéquent, comme le carré CF eſt au carré GB, ainſi le carré EF au carré FA. Et par compoſition, comme les carrés CF et GB enſemble ſont au carré GB, ainſi l'enſemble des carrés EF et FA, c'eſt-à-dire le carré EA au carré AF. Mais les carrés CF et GB valent enſemble le rectangle GCA avec le carré AG, ce qui ſe démontre ainſi. Le carré
*6. 2. *Élém.*[15]) GB eſt égal au rectangle CGA augmenté du carré AB ou AF *. Donc, ajoutant de part et d'autre le carré FC, les carrés GB et FC pris enſemble feront égaux au rectangle CGA plus le carré AC. Or, le rectangle CGA avec le carré AC équivant au rectangle GCA avec le carré GA. Donc auſſi les carrés CF et GB équivaudront enſemble au rectangle GCA avec le carré AG, comme nous l'avons dit. Donc, comme le rectangle GCA avec le carré AG au carré GB, ainſi le carré EA eſt au carré AF, c'eſt-à-dire ainſi le carré GA au carré AB. Et permutant, comme le rectangle GCA avec le carré GA au carré GA, ainſi le carré GB eſt au carré AB. Donc, par partage, comme le rectangle GCA eſt au carré GA, ainſi le carré GB diminué du carré AB, c'eſt-à-dire le rectangle CGA, ſera au carré AB. Et permutant de nouveau, comme le rectangle GCA eſt au rectangle CGA, c'eſt-à-dire comme CA à AG, ainſi le carré GA eſt au carré AB. Pour cette raiſon, ce qu'on obtient du carré GA avec la même droite GA, c'eſt-à-dire le cube GA, ſera égal à ce qu'on obtient du carré AB avec AC; c'eſt-à-dire au double du cube de AB. Ce qu'il fallait démontrer [16]).

Probl. III.

Trouver deux moyennes proportionnelles à deux droites données [17]).

Pour ce problème Eutocius a noté plusieurs conſtructions des vieux géomètres dans ſes commentaires ſur le livre 2 d'Archimède ſur la Sphère et le Cylindre [18]); mais elles ne ſont pas toutes d'invention différente, ainſi qu'il l'a lui-même juſtement remarqué. Car Apollonius et Philon le Byzantin [20]) paraiſſent avoir ſuivi l'invention d'Héron [19]), bien que quelques-uns jugent que Héron eſt poſtérieur à Apollonius [21]). Pappus et Sporus ont ſuivi la méthode de Dioclès [22]). On trouve au

[15]) Voir, sur cette proposition, la note 2, p. 46 du Tome présent.

[16]) On peut consulter encore sur cette démonstration la note 3, p. 46 du Tome présent.

[17]) Voir, sur l'historique de ce problème, les p. 103—106 de l'„Avertissement".

[18]) Voir les Commentaires d'Eutocius, aux p. 14—27 de l'édition de Bâle (Heiberg, III, p. 66—127).

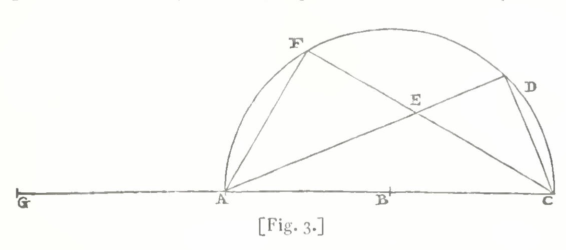
[19]) Voir, sur la construction de Héron, les p. 15—16 de l'édition de Bâle (Heiberg, III, p. 70—73) et consulter encore la note 10, p. 40 du Tome présent.

[20]) Voir, sur ces constructions, les p. 16—17 de l'édition de Bâle (Heiberg, III, p. 72—79). L'identité essentielle des trois constructions fut déjà constatée par Eutocius.

[21]) La question de déterminer l'époque où vivait Héron a beaucoup occupé les savants jusque dans notre temps. On peut consulter à ce propos le Chap. XVIII du T. I de l'ouvrage bien-

componendo CF ad FE ut GB ad BA five AF. Et permutando CF ad GB ut EF ad FA. Quare ut CF quadratum ad quadr. GB, ita quadr. EF ad quadr. FA. Et componendo ut quadr. CF & GB ad quadr. GB, ita quadr. EF & FA fimul, hoc eft, quadr. EA ad quadr. AF. Quadr. autem CF & GB fimul æquantur rectangulo GCA cum quadr. AG, quod fic oftenditur. Quadratum enim GB æquale eft rectangulo CGA & quadrato AB feu AF *. Quare addito utrimque quadrato FC, erunt quadrata GB, FC fimul æqualia rectangulo CGA & quadrato AC. Rectangulum autem CGA cum quadrato AC æquatur rectangulo GCA cum quadrato GA. Itaque & quadrata CF, GB fimul æqualia funt rectangulo GCA cum quadrato AG, ficut diximus. Sicut igitur rectangulum GCA cum quadrato AG ad quadr. GB, ita eft quadr. EA ad quadr. AF, hoc eft, ita quadratum GA ad quadr. AB. Et permutando, ut rectangulum GCA cum quadrato GA ad quadratum GA ita quadr. GB ad quadr. AB. Dividendo igitur, erit ut rectang. GCA ad quadr. GA, ita quadr. GB dempto quadrato AB, hoc eft, rectangulum CGA ad quadr. AB. Et permutando rurfus, ut rectang. GCA ad rectang. CGA, hoc eft, ut CA ad AG ita quadratum GA ad quadr. AB. Quamobrem quod fit ex quadrato GA in ipfam GA, hoc eft, cubus GA æquabitur ei quod fit ex quadrato AB in AC, hoc eft, duplo cubo ex AB. Quod erat demonftrandum [16]).

* 6. 2. *Elem.*[15])



[Fig. 3.]

PROBL. III.

Datis duabus rectis duas medias proportionales invenire [17]).

Veterum Geometrarum ad hoc Problema conftructiones complures retulit Eutocius ad lib. 2. Archimedis de Sphæra & Cylindro [18]), at non omnes inventione diverfas, uti rectè quoque ipfe animadvertit. Heronis enim inventionem [19]) fecuti videntur Apollonius & Philo Byzantius [20]): quanquam Heronem Appolonio ætate pofteriorem nonnulli exiftiment [21]). Dioclis modum Pappus & Sporus [22]). Nico-

connu de Cantor „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik" qui place Héron dans le premier siècle avant J. C., c'est-à-dire après Philon de Byzance et plus d'un siècle entier après Apollonius.

[22]) Voir, sur ces constructions, les p. 17—20 de l'édition de Bâle (Heiberg, III, p. 78—93). Dioclès fait emploi de sa cissoïde; les autres constructions se réduisent aisément a celle de Dioclès, comme Eutocius l'a déjà remarqué.

même lieu [24]) la conſtruction, plus ſubtile que les autres, de Nicomède [23]), que Fr. Viète a inſérée, arrangée un peu autrement, dans ſon Supplément à la Géométrie [25]). La méthode de R. Deſcartes par l'interſection d'une parabole et d'une circonſérence [26]), dont on trouve la démonſtration dans les livres de Harmoniques de M. Merſenne [27]), eſt excellente et nouvelle. Viennent maintenant les nôtres.

Soit de deux lignes données AC la plus grande [28]), qui eſt diviſée en deux parties égales au point E. Et ſoit AB la plus petite, que nous ſuppoſerons placée de telle façon, que le triangle EAB ait les côtés AE, EB égaux. Achevons le parallélogramme CABD, et prolongeons AC, AB. Puis appliquons une régle au point D et mouvons-la juſqu'à ce qu'elle ait la poſition GF, où elle découpe juſtement une portion EF égale à la droite EG; (ce que nous obtiendrons en eſſayant ſouvent, ou par le tracé d'une hyperbole, ainſi que nous le montrerons plus loin). Je dis que l'on a trouvé alors les deux moyennes BG, CF entre AC et AB.

Soit en effet EK à angles droits ſur AB. Puis donc que BE eſt égal à EA, la droite AB ſera diviſée en deux parties égales en K; mais la droite BG eſt adjacente. Donc le rectangle AGB avec le carré ſur KB ſera égal au carré KG. Et ajoutant de part et d'autre le carré KE, le rectangle AGB avec les carrés BK et KE, c'eſt-à-dire avec le carré BE, ſera égal au carré EG. De même, puiſque AC eſt partagé en deux parties égales en E, et que la ligne CF eſt adjacente, le rectangle AFC avec le carré EC ſera égal au carré EF. Mais le carré EF eſt égal au carré EG. Donc le rectangle AFC avec le carré CE ſera égal au rectangle AGB avec le carré BE. Or, le carré CE ou EA eſt égal au carré EB. Donc auſſi le rectangle reſtant AFC eſt égal au rectangle AGB. Pour cette raiſon, comme FA à AG ainſi BG eſt à CF. Mais comme FA à AG ainſi DB eſt à BG et ainſi auſſi FC à CD.

---

[23]) Consultez, sur cette construction, la note 2, p. 13 et la p. 15 du Tome présent. Nous avons exposé ailleurs, aux p. 4—6 du Tome présent, comment l'étude de la construction de Nicomède a été pour Huygens le point de départ d'autres recherches sur les problèmes solides et surtout de ses solutions nouvelles, qui vont suivre, du problème des deux moyennes proportionnelles.

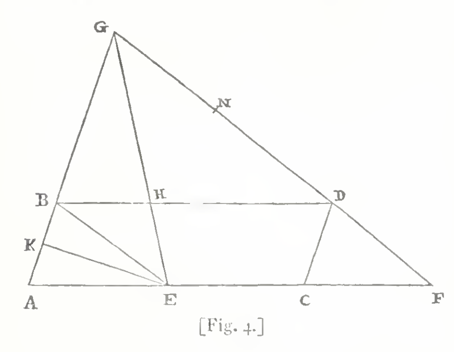
[24]) Voir les p. 26—27 de l'édition du Bâle (Heiberg, III, p. 122—127).

[25]) Voir la Prop. V, p. 242—243 de l'ouvrage cité dans la note 31, p. 10 du T. I. Pour comparer la construction de Viète avec celle de Nicomède on doit identifier respectivement les points A, B, C, D, G et H de la figure de Viète avec les points B, A, L, C, D et E de la figure de la page 15 du Tome présent. Alors on s'aperçoit que Viète commence sa construction par décrire un cercle dont le centre deviendra le point B de cette dernière figure et dont le diamètre est égal au plus grand des deux segments donnés. Dans ce cercle il inscrit une corde LA égale au plus petit segment et il prend CL = LA. Ensuite il tire la droite AD parallèle à CB et la droite BE de manière qu'on a DE = AB. Alors, d'après lui, AE est la première des deux moyennes et la seconde est la distance du point E au point d'intersection du cercle avec BE, mais puisqu' on a DE = BA on voit aisément que cette distance est égale à BD.

Ainsi la comparaison de la solution de Viète avec celle de Nicomède, qui donne AE et GK pour les deux moyennes, fait connaître une nouvelle propriété de la figure mentionnée, c'est-à dire l'égalité de BD avec GK. On a, en effet, BD : DE = CA : AE, donc BD : 2DE = $\frac{1}{2}$ CA :

medea autem conſtructio [23]) præ cæteris ſubtilis ibidem [24]) extat, quam Fr. Viëta paulo aliter concinnatam ſuo Geometriæ ſupplemento inſeruit [25]). R. Carteſii egregia eſt & nova per paraboles & circumferentiæ interſectionem [26]), cujus demonſtratio legitur in libris Harmonicôn M. Merſenni [27]). Noſtræ autem ſequentes.

Sit datarum linearum major AC [28]), quæ bifariam ſecetur in E. Minor autem ſit AB, quæ ſic conſtituatur ut triangulus EAB habeat crura æqualia AE, EB. Et perficiatur parallelogrammum CABD. Et producantur AC, AB. Porro applicetur regula ad punctum D, & moveatur quouſque poſitionem habeat GF, abſcindens nimirum EF æqualem rectæ EG; (Hoc autem vel ſæpius tentando aſſequemur, vel deſcriptâ hyperbole, uti poſtea oſtendetur) Dico inter AC, AB medias duas inventas eſſe BG, CF.



[Fig. 4.]

Sit enim EK ipſi AB ad angulos rectos. Quia igitur BE æqualis EA, dividetur AB in K bifariam: adjecta autem eſt linea BG. Ergo rectangulum AGB cum quadrato ex KB, æquabitur quadrato KG. Et addito utriumque quadrato KE, erit rectangulum AGB unà cum quadratis BK, KE, hoc eſt unà cum quadrato BE, æquale quadrato EG. Similiter quia AC bifariam dividitur in E, & adjecta eſt linea CF, erit rectangulum AFC cum quadrato EC æquale quadrato EF. Quadratum autem EF æquale eſt quadrato EG. Erit igitur rectangulum AFC cum quadrato CE, æquale rectangulo AGB cum quadrato BE. Atqui quadratum CE ſeu EA æquale eſt quadrato EB. Ergo & reliquum rectangulum AFC æquale rectangulo AGB. Quare ſicut FA ad AG ita BG ad CF. Ut autem FA ad AG ita eſt DB ad BG, & ita quoque FC ad CD. Igitur ut DB, hoc eſt,

---

AE, ou bien BD : AH = GH : AE; mais, puisqu' on a de même GK : AH = GH : AE, il en résulte BD = GK.

[26]) Voir, dans la „Géometrie", l'article· „L'inuention de deux moyenes proportionelles," p. 469—470 du Tome VI de l'édition d'Adam et Tannery.

[27]) Voir l'ouvrage cité dans la note 5, p. 100 du T. V. Aux pages 147—148 du second volume on y trouve, en effet, une démonstration à la mode des anciens de la construction de Descartes.

[28]) L'analyse de la construction qui va suivre ici en premier lieu fut inventée le 9 mars 1652 (voir la première partie de la pièce N°. XI, p. 49—50 du Tome présent). Le lendemain Huygens rédigea la construction et la démonstration en forme (voir les p. 50 et 51 de la pièce mentionnée); ensuite il les modifia ce même jour (voir la note 5 de la pièce mentionnée). C'est cette dernière rédaction qu'on retrouve ici avec de légères altérations.

Donc comme DB, c'eſt-à-dire AC, à BG, ainſi BG eſt à FC, et FC à CD, c'eſt-à-dire AB. Ce qu'il fallait démontrer. Quant à ce que nous avons dit, que l'on peut également trouver par la deſcription d'une hyperbole comment la droite FDG doit être tracée, cela ſera évident par ceci: ſuppoſons que l'on ait fait en ſorte que EF, EG ſoient égales, et que l'on prenne GN égale à DF. Le point N eſt ainſi ſur l'hyperbole que l'on tracera par le point D avec les droites FA, AG comme asymptotes *. Mais le même point N eſt auſſi ſur la circonférence de cercle, dont le centre eſt E et le rayon ED; (car ceci ſe comprend facilement, puiſque le triangle FEG eſt iſocèle et que NG eſt égal à DF). Par conſéquent le point N eſt donné par l'interſecton de l'hyperbole et de la dite circonférence. Mais D auſſi eſt donné, La ligne FG eſt donc donnée en poſition en la menant par les points N et D. Et la conſtruction eſt évidente.

* 8. 2. *Coniques* [29]).

Autrement [30]).

Autour du diamètre AC égal à la plus grande des lignes données on décrit un cercle; on y place AB égale à la plus petite des droites données et on achève le parallélogramme AD; puis, AB étant prolongée, on mène du centre E une droite EHG, de telle manière que HD, HG ſoient égales entr'elles. Suppoſons qu'elle coupe la circonférence en L. Je dis qu' on a trouvé les deux moyennes BG et GL aux deux droites AC, AB.

Prolongeons [31]), en effet, GE juſqu' à la circonférence en K, joignons AK et menons BO qui lui ſoit parallèle. Alors les triangles AEK, BHO ſont ſemblables; et comme AE eſt égale à EK, BH et HO ſeront auſſi égales entr'elles. Mais encore HG, HD ſont égales entr'elles. Donc toute la droite OG eſt égale à BD, c'est-à-dire au diamètre AC ou LK; et après avoir enlevé la partie commune LO, il reſte des lignes égales LG, OK. Mais le rectangle KGL eſt égal au rectangle AGB. Donc comme KG eſt à GA ainſi BG à GL. Mais comme KG à GA ainſi OG eſt à GB et ainſi auſſi le reſte OK, c'est-à-dire LG, à BA. Donc comme OG, c'eſt-à-dire AC, à GB ainſi BG eſt à GL et GL à AB. Ce qu'il fallait démontrer. Or, l'invention de cette conſtruction a la même origine que la précédente [32]).

[29]) Voir, à la p. 46 recto de l'édition de Commandin, citée dans la note 4, p. 6 du T. I, la proposition suivante: „Si hyperbolae recta linea occurrat in duobus punctis, producta ex utraque parte cum asymptotis conueniet: & lineae, quae ex ipsa abscissae intersectionem, & asymptotos interiiciuntur, aequales erunt."

[30]) On retrouve la construction qui suit à la p. 52 du Tome présent.

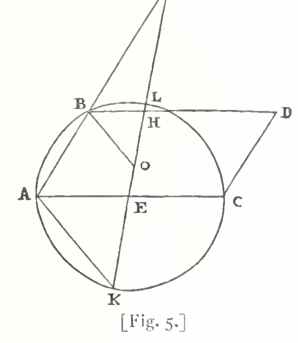
[31]) La démonstration qui va suivre ne diffère pas sensiblement de celle qu'on trouve, sous la date du 5 juin 1652, dans le dernier alinéa de la pièce XI, p. 49—53 du Tome présent. L'avant-

AC ad BG ita BG ad FC, & FC ad CD, hoc eſt, AB. Quod erat dem. Quod autem dictum eſt, etiam deſcriptâ hyperbole inveniri quomodo linea FDG ducenda ſit, hinc conſtabit: Factum enim ſit, ut EF, EG ſint æquales, & ſumatur GN æqualis DF. Itaque punctum N eſt ad hyperbolem quæ deſcribetur per D punctum circa aſymptotos FA, AG*. Sed idem punctum N eſt quoque ad circuli circumferentiam cujus centrum E radius ED: (Hoc enim facile intelligitur quia triangulus FEG eſt æquicruris, & NG æqualis DF) Itaque datum eſt punctum N ad interſectionem hyperboles & circumferentiæ dictæ. Sed & D datum eſt. Datur igitur poſitione linea FG ducenda per puncta N, D. Et compoſitio manifeſta eſt.

* 8. 2. *Conic.*[29])

ALITER [30]).

Circa diametrum AC majori datarum linearum æqualem circulus deſcribatur & ponatur AB minori datarum æqualis, & perficiatur parallelogrammum AD: productâque AB, ducatur ex centro E recta EHG eâ ratione ut HD, HG ſint inter ſe æquales. Secet autem circumferentiam in L. Dico duabus AC, AB duas medias inventas eſſe BG, GL.



[Fig. 5.]

Producatur [31]) enim GE uſque ad circumferentiam in K, & jungatur AK, eique parallela ducatur BO. Similes itaque ſunt trianguli AEK, BHO; & quia AE æqualis EK, etiam BH, HO æquales erunt. Sed & HG, HD inter ſe æquales ſunt. Igitur tota OG æqualis BD, hoc eſt, diametro AC vel LK; & ablatâ communi LO, relinquentur æquales LG, OK. Eſt autem rectangulum KGL æquale rectangulo AGB. Ergo ut KG ad GA ita BG ad GL. Sed ut KG ad GA ita eſt OG ad GB & ita reliqua OK, hoc eſt, LG ad BA. Ergo ut OG, hoc eſt, AC ad GB ita BG ad GL & GL ad AB. Quod erat demonſtr. Hujus autem conſtructionis inventio eandem cum præcedenti originem habet [32]).

dernier alinéa de cette même pièce contient une autre démonstration et fait connaître l'origine de la construction.

[32]) Voir la note 9, p. 52 du Tome présent.

AUTREMENT [33]).

Soient données AB et Q auxquelles il s'agiſſe de trouver deux moyennes proportionnelles, AB étant d'ailleurs plus grande que Q.

Prenons AF égale à la moitié de Q et, ayant prolongé AB des deux côtés, ſoit BR égale à cette droite même. Elevons à AB la perpendiculaire FC, et portons RC égale à RA; puis joignons BC et menons AE parallèle à cette droite. Enfin, ayant appliqué une règle au point C, mouvons la jusqu' à ce qu'elle ait la poſition CD, où elle fait CE égale à AD. Je dis qu'entre AB et Q les deux moyennes proportionnelles ſont CE et ED.

Joignons en effet CA. Alors, comme RA et RC ſont égales et que l'angle CFA eſt droit, RA ſera à AC comme AC au double de AF, c'eſt-à-dire à Q, et par conſéquent le carré AC ſera égal au rectangle ſur RA et Q. Mais le carré AC avec le carré AD et le double du rectangle DAF, c'eſt-à-dire le rectangle formé
* 12.2. Élém.[34]) par DA et Q, égale le carré DC*. Donc le carré DC équivaudra au carré DA augmenté des rectangles conſtruits avec DA et Q et avec RA et Q, c'eſt-à-dire augmenté avec le rectangle ſur DR et Q. Mais le carré DB eſt égal au rectangle
* 6.2. Élém.[35]) RDA avec le carré AB*. Donc, comme le carré DB au carré DC, c'eſt-à-dire comme le carré AB au carré AD, (car, comme DB à DC tel eſt AB à EC ou AD) ainſi le rectangle RDA avec le carré AB ſera au rectangle ſur RD, Q avec le carré AD. Et pour cette raiſon le rectangle RDA ſera auſſi au rectangle ſur
* 19.5. Élém.[36]) RD, Q comme le carré AB au carré AD*. Mais, comme le carré AB au carré AD, ainſi AB eſt à ED en longueur: car, comme BA à AD, ainſi CE, c'eſt-à-dire la même AD, à ED. Donc le rectangle RDA eſt au rectangle ſur RD, Q, c'eſt-à-dire AD eſt à Q, comme AB à ED. Permutant donc et invertiſſant, BA eſt à AD comme ED à Q. Mais auſſi, comme BA à AD, ou CE, ainſi CE à ED. Donc, comme AB à CE ainſi CE à ED et ED à Q. Ainſi donc entre AB et Q les moyennes proportionnelles ſont CE, ED. Ce qu'il fallait démontrer.

[33]) Comparez, aux pages 54—56 du Tome présent, la pièce N° XII, datée du 16 et du 19 mars 1652. Elle contient dans une autre rédaction la construction et la démonstration qui vont suivre, et elle nous fait connaître l'analyse qui les a amenées.

[34]) Voir la note 15, p. 29 du Tome présent.

[35]) Voir la note 2, p. 46 du Tome présent.

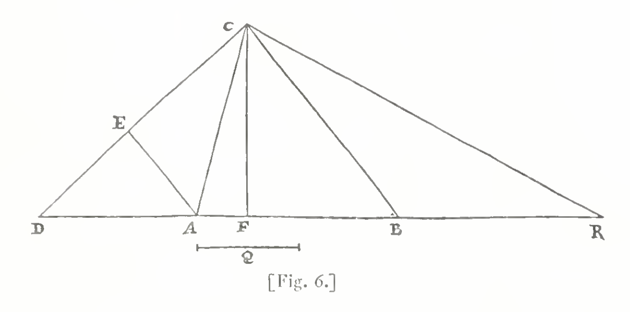
[36]) Voir la note 26, p. 311 du Tome XI.

ALITER [33]).

Sint datæ AB & Q quibus duas medias proportionales invenire opus ſit; AB autem quam Q major.

Dimidiæ Q ſumatur æqualis AF, & productâ AB utrimque, ſit ipſi æqualis BR. Erigatur autem ad AB perpendicularis FC, & ipſi RA æqualis ponatur RC: & jungatur BC, & huic parallela ducatur AE. Denique applicatâ regulâ ad punctum C, moveatur ea quouſque poſitionem habeat CD, faciens CE æqualem AD. Dico inter AB & Q duas medias eſſe CE, ED.

Jungatur enim CA. Igitur quia æquales ſunt RA, RC & angulus CFA rectus,



[Fig. 6.]

erit RA ad AC ut AC ad duplam AF, hoc eſt, Q: ac proinde quadratum AC æquale rectangulo ſub RA & Q. Quadratum autem AC cum quadrato AD & duplo rectangulo DAF, hoc eſt, ſub DA & Q contento, æquatur quadrato DC *. *12.2.*Elem.* [34])
Igitur quadratum DC æquabitur quadrato DA unà cum rectangulis ſub DA, Q, & ſub RA, Q, hoc eſt, unà cum rectangulo ſub DR & Q. Quadratum autem DB æquale rectangulo RDA & quadrato AB *. Igitur ut quadratum DB ad quadratum *6. 2. *Elem.* [35])
DC, hoc eſt, ut quadr. AB ad quadr. AD, (eſt enim ut DB ad DC ſic AB ad EC ſive AD) ita erit rectangulum RDA cum quadrato AB ad rectangulum ſub RD, Q, cum quadrato AD. Quamobrem & rectangulum RDA ad rectangulum ſub RD, Q, ſicut quadr. AB ad quadr. AD *. Eſt autem ut quadratum AB ad quadr. *19.5.*Elem.* [36])
AD, ita AB ad ED longitudine: nam ut BA ad AD ſic CE, hoc eſt, ipſa AD ad ED. Ergo rectangulum RDA ad rectangulum ſub RD, Q, hoc eſt, AD ad Q ſicut AB ad ED. Et permutando & invertendo, BA ad AD ut ED ad Q. Atqui ut BA ad AD, hoc eſt, CE ita CE ad ED. Ergo ut AB ad CE ita CE ad ED, & ED ad Q. Itaque inter AB & Q mediæ proportionales ſunt CE, ED. Quod erat oſtendendum.

PROBL. IV.

Étant donné un carré dont l'un des côtés est prolongé, appliquer dans l'angle extérieur une droite de grandeur donnée qui passe par le sommet opposé [37]).

Soit BA un carré dont le côté FA est prolongé. Soit donné aussi la ligne K Et qu'il s'agisse de mener la droite BDC de telle façon, que la partie interceptée DC soit égale à la droite donnée K.

Supposons qu' aux carrés sur K et EB soit égal le carré EG; sur BG comme diamètre décrivons le demi-cercle BCG, coupant la droite FA prolongée en C, et menons BDC. Je dis que DC est égale à cette droite K. Joignons en effet CG, GD; et soit CH à angles droits sur BG.

Puisqu' alors les triangles BED, CHG sont semblables et que les côtés BE, CH autour des angles droits sont égaux entr'eux, le côté DB sera aussi égal au côté GC, et DE à GH. Mais les carrés CD, CG, c'est-à dire les carrés DC, CH et HG, sont égaux au carré DG*, c'est-à-dire aux carrés GE, ED. Donc, retranchant d'ici le carré ED et de là le carré HG, les deux carrés DC et CH seront égaux au carré EG, c'est-à-dire aux carrés de K et EB*. Mais le carré EB est égal au carré CH. Donc aussi le carré restant DC sera égal au carré K, et la droite DC à K même. Ce qu'il fallait démontrer.

*47.1. *Élem.* [38])

* *Par construct.*

Cette démonstration est différente de celle que l'on trouve chez Pappus Alex. livre 7. prop. 72 [39]). Mais la construction ne diffère pas. Du reste nous avons trouvé qu'elle s'applique aussi au cas suivant.

PROBL. V.

Soit donné un carré dont deux côtés adjacents sont prolongés, appliquer dans l'angle intérieur une droite de grandeur donnée qui passe par le sommet opposé. Il faut cependant que la droite donnée ne soit pas moindre que le double de la diagonale du carré [40]).

Soit donné le carré AB [Fig. 8], et soient prolongées les côtés AF, AE. Et soit donnée la droite K, pas moindre que le double de la diagonale AB. Et qu'il faille faire passer par le sommet B une droite DC égale à K.

---

[37]) Consultez, sur l'historique du problème, la p. 106 du Tome présent.

[38]) „In rectangulis triangulis, quadratum quod à latere rectum angulum subtendente describitur, aequale est eis, quae à lateribus rectum angulum continentibus describuntur, quadratis." (Clavius, p. 147).

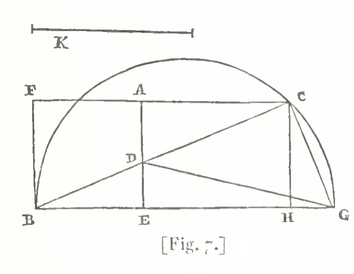
[39]) Voir la page 206 verso de l'ouvrage cité dans la note 3, p. 259 du T. II.

PROBL. IV.

Quadrato dato & uno latere producto, aptare sub angulo exteriori rectam magnitudine datam quæ ad angulum oppositum pertineat [37]).

Esto quadratum BA cujus productum sit latus FA. Data verò linea K. Et oporteat ducere rectam BDC, ita ut pars intercepta DC sit datæ K æqualis.

Quadratis ex K & EB sit æquale quadratum EG; & super BG diametro describatur semicirculus BCG secans rectam FA productam in C, & ducatur BDC. Dico DC æqualem esse ipsi K. Jungantur enim CG, GD; sitque CH ipsi BG ad angulos rectos.



[Fig. 7.]

Quia igitur similes sunt trianguli BED, CHG, & latera BE, CH circa angulos rectos inter se æqualia, erit & latus DB æquale lateri GC, & DE ipsi GH. Sunt autem quadrata DC, CG, hoc est quadrata DC, CH, & HG æqualia quadrato DG *, hoc est, quadratis GE, ED. Ergo dempto hinc quadrato ED, inde verò quadrato HG; erunt duo quadrata DC & CH æqualia quadrato EG, hoc est quadratis ex K & EB *. Quadratum autem EB æquale est quadrato CH. Ergo & reliquum quadratum DC æquabitur K quadrato; & recta DC ipsi K. Quod erat ostendendum.

* 47. 1. *Elem.* [38])

* *Ex construct.*

Demonstratio hæc ab ea diversa est quæ apud Pappum Alex. legitur lib. 7. prop. 72 [39]). Constructio verò non differt. Cæterum eandem ad casum quoque sequentem pertinere invenimus.

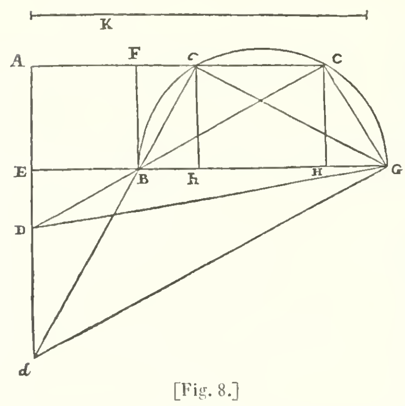
PROBL. V.

Dato quadrato, & duobus contiguis lateribus productis, aptare sub angulo interiori rectam magnitudine datam quæ per angulum oppositum transeat. Oportet autem non minorem esse datam quam sit quadrati diameter dupla [40]).

Datum sit quadratum AB [Fig. 8], productaque latere AF, AE. Data vero linea K, non minor duplâ AB diametro. Et oporteat per angulum B ponere rectam DC ipsi K æqualem.

[40]) Voir, pour l'historique du problème, la p. 107 du Tome présent.

Si K était égal au double de AB, la conſtruction ſerait évidente; alors, en effet, il faut mener par B la droite qui eſt à angles droits ſur AB, et celle là réſoudra le problème. Mais alors que K eſt plus grand que le double de AB, la conſtruction s'exprime par les mêmes mots que dans le problème précédent; et la démonſtration auſſi eſt la même.

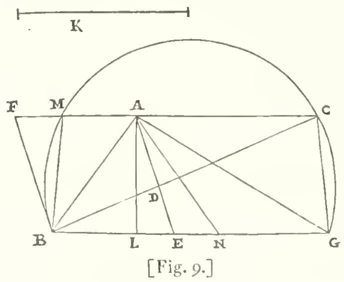


[Fig. 8.]

Or, que la circonférence BCG coupera la droite AF prolongée, cela eſt manifeſte par ceci. Puiſque K eſt plus grande que le double de la diagonale AB, le carré ſur K ſera plus grand que huit carrés EB. Donc le carré EG ſera plus grand que neuf carrés ſur EB; et par conſéquent EG eſt plus grand que trois fois EB. Donc la moitié de BG, c'eſt-à-dire le rayon du demi-cercle décrit, eſt plus grand que EB ou BF; il eſt donc néceſſaire que la droite AC ſoit coupée par la circonférence BCG.

Probl. VI.

Soit donné un loſange dont l'un des côtés ſoit prolongé, appliquer dans l'angle extérieur une droite de grandeur donnée qui paſſe par le ſommet oppoſé [41]).

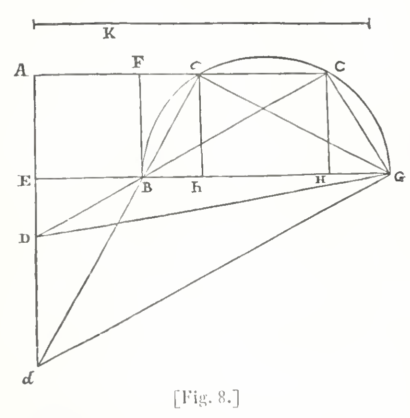


[Fig. 9.]

Soit donné le loſange AB, dont le côté FA eſt prolongé. Soit donnée auſſi la ligne K. Et qu'il s'agiſſe de mener la droite BDC, de telle façon que la partie interceptée DC ſoit égale à cette ligne K.

Menons la diagonale AB et prolongeons le côté BE; et ſoit le carré AG égal aux carrés de K et AB. Sur BG décrivons un arc de circonférence qui ſoit capable d'un angle égal à BFA. Elle coupera le côté FA prolongé, ainſi qu'il ſera prouvé. Puis, vers le point d'interſection C menons BC. Je dis que la partie DC interceptée de cette ligne eſt égale à la droite donnée K. Mais d'abord voici comment on démontre que la circonférence décrite coupe le côté FA prolongé. Menons AN de telle façon que l'angle BAN ſoit égal à l'angle BFA ou BEA. Alors le triangle

Si K æqualis fuerit duplæ AB, conftructio manifefta eft; tunc enim per B ducenda eft quæ fit ipfi AB ad angulos rectos, eaque propofitum efficiet. Cum verò major erit K quam dupla AB, conftructio iifdem verbis præcipitur atque in Problemate præcedenti: & demonftratio quoque eft eadem.



[Fig. 8.]

Quod autem circumferentia BCG fecabit productam AF hinc manifeftum eft. Etenim quia K major eft duplâ diametro AB, erit K quadratum majus octo quadratis EB. Itaque quadratum EG majus quam quadrata novem ex EB; ac proinde EG major quam tripla EB. Dimidia igitur BG, hoc eft, radius defcripti femicirculi major quam EB vel BF; unde neceffe eft rectam AC fecari à circumferentia BCG.

Probl. VI.

Rhombo dato, & uno latere producto, aptare fub angulo exteriori lineam magnitudine datam quæ ad oppofitum angulum pertineat [41]).

Sit datus rhombus AB [Fig. 9], cujus productum latus FA. Data autem linea K. Et oporteat ducere rectam BDC, ita ut pars intercepta DC fit ipfi K æqualis.

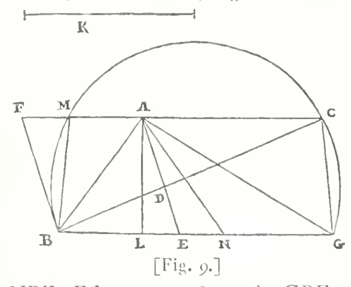
Ducatur diameter AB, & latus BE producatur; & quadratis ex K & AB fit æquale quadratum AG. Et fuper BG circumferentiæ portio defcribatur quæ capiat angulum ipfi BFA æqualem. Secabit ea productum latus FA, ut modo oftendetur. Itaque ad interfectionis punctum C ducatur BC. Dico hujus partem interceptam DC lineæ datæ K æqualem effe. Quod autem circumferentia defcripta latus FA productum fecabit, fic primùm oftenditur. Ducatur AN ita ut fit angulus BAN angulo BFA vel BEA æqualis. Itaque triangulus BAN triangulo BEA fimilis eft, ac proinde ifofceles quoque. Quare fi fuper BN circumferentia defcribatur quæ capiat angulum BFA, ea continget latus FA in A puncto. Sed

[41]) Voir, pour l'historique du problème, les p. 107—108 du Tome présent. La rédaction du texte, qui va suivre, ne diffère que légèrement de celle de la pièce du 23 octobre 1653 (p. 247—248 du T. I), envoyée à van Schooten. Et cette dernière pièce est le résultat d'un remaniement de celle du 9 février 1652, que l'on trouve aux p. 26—31 du Tome présent et qui contient l'analyse, qui a amené la construction, dans sa forme primitive un peu différente de celle du texte. Voir, sur cette modification, la note 8, p. 28 du Tome présent.

BAN eſt ſemblable au triangle BEA, et par conſéquent iſocèle comme celui-ci. Pour cette raiſon, ſi ſur BN on décrit une circonférence capable de l'angle BFA, elle touchera le côté FA en A. Mais BG eſt plus grand que BN: car le carré AG eſt plus grand que le carré AN ou AB, puiſqu'il eſt égal aux carrés de K et AB. Donc AG tombera en dehors du triangle iſocèle BAN. Et ainſi il eſt établi que la circonférence décrite ſur BG et capable d'un angle égal à BFA ou BAN coupe la ligne FAC. Soit M l'autre point d'interſection, joignons BM, GC, et ſoit AL la perpendiculaire abaiſſée de A ſur BE.

Puis donc que le carré AG eſt égal aux carrés ſur K et AB, et que le même carré AG eſt égal aux carrés AB et BG diminué du double du rectangle GBL, c'eſt-à-dire moins le rectangle GBN; le carré K ſera égal au carré BG moins le rectangle GBN, c'eſt-à-dire au rectangle BGN. Mais, comme le rectangle BGN au rectangle BE, GN, ainſi BG eſt à BE. Donc, comme BG à BE ainſi auſſi le carré K au rectangle GN, BE, c'eſt-à-dire au rectangle GBE moins le rectangle NBE. Mais le rectangle CBD eſt égal au rectangle GBE, parce que GB eſt à BC comme DB à BE à cauſe des triangles ſemblables GBC, DBE; ils ont en effet l'angle en B commun, et l'angle BCG eſt égal à l'angle BED. De même le carré AB eſt égal au rectangle NBE, puiſque, à cauſe des triangles ſemblables, NB eſt à BA comme AB à BE. Donc GB ſera à BE comme le carré K au rectangle CBD moins le carré AB. Mais au rectangle CBD moins le carré AB équivaut le rectangle DA, AC; ce qui ſe prouve ainſi. En effet, puiſque le quadrilatère CGBM eſt dans un cercle, les angles CGB et BMC enſemble ſont égaux à deux angles droits. Mais de même les angles EDB, ADB. De ceux-ci EDB eſt égal à l'angle CGB en vertu de la ſimilitude des triangles GBC, DBE. Donc auſſi l'angle BMC ſera égal à l'angle ADB. Les triangles ABM, ADB ont donc les angles M et D égaux entr'eux. Mais auſſi les angles en A et le côté AB commun. Et ainſi les dits triangles ſont ſemblables et égaux. Par conſéquent AM égale AD et MB égale BD, et l'angle MBA égale ABD. Donc dans le triangle MBC l'angle B eſt diviſé en deux parties égales par la droite BA, et par conſéquent le rectangle MBC moins le carré BA eſt égal au rectangle MAC. Mais le rectangle CBD eſt égal au rectangle CBM; et le rectangle DAC égal au rectangle MAC. Donc le rectangle CBD moins le carré BA eſt égal au rectangle CAD, ainſi qu'il a été dit. Ainſi GB eſt à BE comme le carré K au rectangle DAC. Mais, comme GB à BE ainſi le rectangle GBE, c'eſt-à-dire le rectangle CBD, eſt au carré BE. Donc, comme le carré K au rectangle DAC ainſi le rectangle CBD au carré BE. Or, le rapport du rectangle CBD au carré BE eſt compoſé du rapport DB à BE, c'eſt-à-dire DC à CA, et du rapport CB à BE ou BF, c'eſt-à-dire CD à DA. Donc auſſi le carré K eſt au rectangle DAC dans le rapport compoſé du rapport DC à CA et DC à DA, c'eſt-à-dire dans le même rapport que celui du carré DC au rectangle DAC. Pour cette raiſon le carré K eſt égal au carré DC; et DC à K en longueur. Ce qu'il fallait démontrer.

BG major eſt quam BN: nam quadratum AG majus eſt quadrato AN vel AB, cum ſit æquale quadratis ex K & AB. Quare AG cadet extra triangulum iſoſcelem BAN. Itaque manifeſtum eſt circumferentiam ſuper BG deſcriptam capientemque angulum ipſi BFA vel BAN æqualem ſecare lineam FAC. Eſto alterum interſectionis punctum M & jungantur BM, GC & cadat in BE ex A perpendicularis AL.



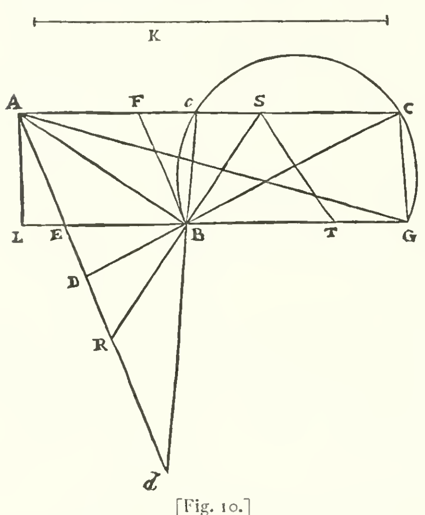
[Fig. 9.]

Quia igitur quadratum AG æquale eſt quadratis ex K & AB: atque idem quadratum AG æquale quadratis AB & BG minùs duplo rectangulo GBL, hoc eſt, minùs rectangulo GBN; erit K quadratum æquale quadrato BG minùs rectangulo GBN, hoc eſt, rectangulo BGN. Eſt autem ut rectangulum BGN ad rectang. BE, GN ita BG ad BE. Ergo ut BG ad BE ita quoque quadratum K ad rectangulum GN, BE, hoc eſt, rectangulum GBE minùs rectangulo NBE. Eſt autem rectangulo GBE æquale rectang. CBD, quoniam GB ad BC ut DB ad BE propter triangulos ſimiles GBC, DBE; habent enim angulum ad B communem, & angulus BCG ipſi BED eſt æqualis. Item rectangulo NBE æquale eſt quadratum AB quia propter triangulos ſimiles eſt NB ad BA ut AB ad BE. Ergo erit GB ad BE ut quadratum K ad rectangulum CBD minùs quadrato AB. Eſt autem rectangulo CBD minùs quadr. AB æquale rectangulum DA, AC; quod ſic oſtenditur. Etenim quia quadrilaterum CGBM eſt in circulo, ſunt anguli CGB & BMC ſimul duobus rectis æquales. Sed & anguli EDB, ADB. Quorum EDB æqualis angulo CGB propter ſimilitudinem triangulorum GBC, DBE. Ergo & angulus BMC æqualis erit angulo ADB. Trianguli igitur ABM, ABD angulos M & D inter ſe æquales habent. Verùm & angulos ad A, & latus AB commune. Itaque dicti trianguli ſimiles ſunt & æquales. Quare AM æqualis AD, & MB æqualis BD, & angulus MBA æqualis ABD. In triangulo igitur MBC angulus B in duo æqualia dividitur à recta BA, ideoque rectang. MBC minùs quadrato BA æquatur rectangulo MAC. Sed rectangulo CBM æquale eſt rectangulum CBD; & rectangulo MAC æquale rectang. DAC. Igitur rectang. CBD minùs quadrato BA æquale rectangulo CAD, uti dictum fuit. Eſt itaque GB ad BE ut quadr. K ad rectangulum DAC. Sicut autem GB ad BE ita eſt rectang. GBE, hoc eſt, rectang. CBD ad quadratum BE. Ergo ut quadratum K ad rectang. DAC ita rectang. CBD ad quadratum BE. Ratio autem rectanguli CBD ad quadr. BE compoſita eſt ex ratione DB ad BE, hoc eſt, DC ad CA, & ex ratione CB ad BE ſive BF, hoc eſt, CD ad DA. Ergo & quadr. K. ad rectang. DAC eam habet rationem quæ componitur ex ratione DC ad CA & DC ad DA, hoc eſt, eam quam quadratum DC ad rectang. DAC. Quamobrem quadr. K. quadrato DC æquale eſt: Et DC ipſi K longitudine. Quod erat demonſtrandum.

Probl. VII.

Soit donné un loſange dont deux côtés adjacents ſont prolongés, appliquer dans l'angle intérieur une droite de grandeur donnée qui paſſe par le ſommet oppoſé. Il faut cependant que la droite donnée ne ſoit pas moindre que le double de la diagonale qui joint les deux autres ſommets du loſange [42]).

Soit donné le loſange AB dont on prolonge les côtés AF, AE; ſoit donnée auſſi la droite K égale à laquelle il faut placer une droite CD, paſſant par le ſommet B. Menons la diagonale AB et à angles droits ſur elle la ligne SBR, qui ſera évidemment égale au double de la diagonale FE. Donc K ne doit pas être plus petite que SR. Si elle eſt égale, on a fait ce qui était propoſé. Mais ſuppoſons que la droite donnée K ſoit plus grande que SR. Déjà dans la figure préſente la conſtruction ſera telle qu'il fut propoſé; la même que dans le Problème précédent. Mais la démonſtration eſt un peu différente. Car d'abord on démontre autrement, que la circonférence décrite ſur BG coupe AF prolongée. Soit AL perpendiculaire à EB et menons ST de façon que l'angle BST ſoit égal à l'angle EAF ou BFS. Alors le triangle BST eſt ſemblable au triangle BFS; (car ils ont auſſi les angles en B égaux:) et par conſéquent le triangle BST eſt de même iſocèle. On voit donc que la ligne AS eſt égale à LB avec la moitié de BT. Pour cette raiſon le double de AS ſera égal au double de LB avec BT toute entière. Mais le double de AS eſt le quadruple de AF ou EB. Donc le quadruple de EB eſt égal au double de LB et BT. Et ſi l'on prend une hauteur commune BT, le rectangle formé par le quadruple de EB et BT ſera égal au double du rectangle LBT plus le carré BT. Et ajoutant de part et d'autre le carré BL, quatre fois le rectangle EBT avec le carré LB vaudra deux fois le rectangle LBT avec les carrés BT, BL, c'eſt-à-dire avec le carré LT. Mais puiſque en vertu des triangles ſemblables TB eſt à BS comme BS à BF ou BE, le rectangle EBT ſera égal au carré BS; et pris quatre fois au carré RS. Et ainſi le



[Fig. 10.]

Probl. VII.

Rhombo dato & duobus contiguis lateribus productis, aptare sub angulo interiori rectam magnitudine datam quæ per oppositum angulum transeat. Oportet autem datam non minorem esse quam duplam diametri quæ reliquos duos rhombi angulos conjungit [42]).

Sit datus rhombus AB [Fig. 10] cujus producantur latera AF, AE; data autem sit recta K cui æqualem ponere oporteat CD, per angulum B transeuntem. Ducatur diameter AB, eique ad angulos rectos linea SBR, quæ quidem æqualis erit duplæ diametro FE. Igitur K non minor debet esse quam SR. Si vero æqualis, factum est quod proponebatur. Sed ponatur K major data esse quam SR. Erit jam in schemate hoc prout propositum est constructio eadem, quæ in Problemate præcedenti. Demonstratio autem nonnihil diversa. Etenim hoc primò aliter ostenditur quod circumferentia super BG descripta secat productam AF. Sit AL ad EB perpendicularis & ducatur ST ut sit angulus BST æqualis angulo EAF vel BFS. Est itaque triangulus BST triangulo BFS similis; (nam & angulos ad B æquales habent:) ac proinde æquicruris etiam triangulus BST. Apparet igitur lineam AS æquari ipsi LB cum dimidia BT. Quare dupla AS æquabitur duplæ LB & toti BT. Sed dupla AS est quadrupla AF vel EB. Ergo quadrupla EB æqualis duplæ LB & BT. Sumptâque communi altitudine BT, erit rectangulum sub quadrupla EB & BT contentum, æquale duplo rectangulo LBT & quadrato BT. Et addito utrimque quadrato BL, erit rectangulum EBT quater cum quadrato LB æquale rectangulo LBT bis cum quadratis BT, BL, hoc est quadrato LT. Quia verò propter triangulos similes est TB ad BS ut BS ad BF sive BE, æquale erit rectang. EBT quadrato BS; & quater sumptum quadrato RS. Itaque quadr. SR cum quadrato LB æquale quadrato LT. Quadratum vero K (quod majus est quam RS quadr.) una cum eodem quadrato LB æquale est quadrato LG, uti ex constructione manifestum est, quia scilicet quadr. AG æquale positum fuit quadratis ex K & AB. Itaque majus est quadr. LG quam LT, & LG major quam LT, & BG

[42]) Voir, pour l'historique du problème, les p. 109—110 du Tome présent. La construction et la démonstration qui suivent en premier lieu se trouvent sous une rédaction différente aux p. 248—250 du T. I dans la pièce du 23 octobre 1653, envoyée à van Schooten. Sous la date du 11 février 1652 on trouve, p. 32—37 du Tome présent, une rédaction plus primitive, précédée de l'analyse qui l'a produite.

carré SR avec le carré LB eſt égal au carré LT. Mais le carré K (qui eſt plus grand que le carré RS) pris avec le même carré LB eſt égal au carré LG, ainſi qu'il eſt clair par la conſtruction, parce que, en effet, le carré AG fut poſé égal aux carrés de K et AB. Donc le carré LG eſt plus grand que le carré LT, et LG plus grand que LT, et BG que BT. Pour cette raiſon la circonférence décrite ſur BG, capable de l'angle EAF, coupera la droite AS; car une circonférence ſemblable, ſi elle était décrite ſur BT, toucherait la même droite au point S, puiſque l'angle BST eſt égal à cet angle EAF et que le triangle BST eſt iſocèle.

Enſuite, que CD eſt égal à K ſe démontrera ainſi. Puiſque le carré AG eſt égal aux carres ſur K et AB, et de même le carré AG égal aux carrés AB, BG avec le double du rectangle GBL, à cauſe de cela le carré K ſera égal au carré BG avec le double du rectangle GBL. Mais, comme BG à BE ainſi le carré BG avec le double du rectangle GBL eſt au rectangle GBE avec le double du rectangle EBL; en effet, ces parties ſont ſéparément dans le même rapport. Donc auſſi le carré K eſt au rectangle GBE avec le double du rectangle EBL comme BG à BE. Mais au rectangle GBE équivaut le rectangle CBD, parce que CB eſt à BG comme EB à BD, à cauſe des triangles ſemblables CBG, EBD; car ces triangles ont les angles en B égaux et l'angle BCG égal à l'angle BED. De même le carré AB eſt égal au double du rectangle EBL puiſque, en vertu des triangles ſemblables, comme SA, c'eſt-à-dire le double de BE, à AB ainſi AB eſt à BL. Donc, comme BG à BE ainſi ſera le carré K au rectangle CBD avec le carré AB. Mais à ces deux-ci équivaut le rectangle CAD, parce que dans le triangle CAD l'angle A eſt coupé en deux parties égales par la ligne AB. Donc, comme BG à BE ainſi le carré K eſt au rectangle CAD. Et de là nous concluons enſuite de la même façon que dans le cas précédent, que la ligne DC eſt égale à cette ligne K, en répétant [43]): Mais, comme GB à BE, etc.

Autre ſolution des deux problèmes précédents [45]).

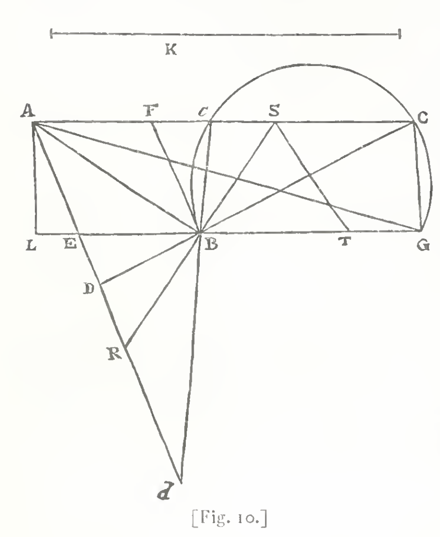
Soit donné le loſange ADBC [Fig. 11], dont le côté DB eſt prolongé. Et ſoit donnée la ligne G. Il s'agit de mener une droite ANF, de façon que la partie interceptée NF ſoit égale à la droite donnée G.

---

[43]) Voir la p. 202 à commencer par la ligne 9 d'en bas.
[44]) Voir la p. 203 à commencer par la ligne 8 d'en bas.
[45]) La pièce N° XIII, p. 57—59 du Tome présent, contient sous la date du 16 août 1652 les mêmes constructions et démonstrations dans une rédaction peu différente. On les retrouve encore dans une lettre à van Schooten du 10 déc. 1653, p. 256—257 du T. I. Consultez, sur leur origine probable, la note 1, p. 57 du Tome présent.

quam BT. Quamobrem circumferentia ſuper BG deſcripta capax anguli EAF ſecabit rectam AS; nam ſimilis circumferentia ſi ſuper BT deſcribatur ea continget ipſam in S puncto, quoniam angulus BST ipſi EAF æqualis eſt trianguluſque BST æquicruris.

Porro quod CD ipſi K æqualis eſt, ſic demonſtrabitur. Quia quadratum AG æquale eſt quadratis ex K & AB: idemque quadratum AG æquale quadratis AB, BG cum duplo rectangulo GBL. Erit propterea quadratum K æquale quadrato BG cum duplo rectangulo GBL. Sicut autem BG ad BE ita eſt quadratum BG cum duplo rectangulo GBL ad rectangulum GBE cum duplo rectangulo EBL; ſingula enim ad ſingula eam habent rationem. Ergo & quadratum K ad rectangulum GBE cum duplo rectangulo EBL ut BG ad BE. Eſt autem rectangulo GBE æquale rectangulum CBD, quoniam CB ad BG ut EB ad BD, propter triangulos ſimiles CBG, EBD; habent enim angulos ad B æquales & angulum BCG angulo BED. Item duplo rectangulo EBL æquale eſt quadratum AB, quia propter triangulos ſimiles ut SA, hoc eſt, dupla BE ad AB ita AB ad BL.



[Fig. 10.]

Igitur ut BG ad BE ita erit quadratum K ad rectangulum CBD cum quadrato AB. Sed hiſce duobus æquale eſt rectangulum CAD; quoniam in triangulo CAD angulus A bifariam dividitur à linea AB. Ergo ut BG ad BE ita eſt quadr. K ad rectangulum CAD. Atque hinc porro eodem modo ut in caſu præcedenti concludemus lineam DC ipſi K æqualem eſſe, repetendo iſta [44]) : Sicut autem GB ad BE, &c.

Vtrumque præcedentium Aliter [45]).

Sit datus rhombus ADBC [Fig. 11] cujus productum latus DB. Et data ſit linea G. Oportet ducere rectam ANF, ut pars intercepta NF ſit datæ G æqualis.

Menons la diagonale AB, et ſoit le carré AH égal aux carrés de G et AB, et menons HE parallèle à cette diagonale BA. Plaçons encore AE égale à la droite G, et prolongeons la juſqu'en F. Je dis que NF eſt égale à cette même droite G.

Que l'on peut placer contre HE une droite AE égale à G, cela eſt évident par ceci. Le carré AH eſt plus grand que la ſomme des carrés AX et XH, parce que l'angle AXH eſt obtus. Mais le même carré AH eſt ſuppoſé égal aux carrés AB, ou HX, et G. Donc le carré G, ou AE, eſt plus grand que le carré AX. D'où il paraît que l'interſection E tombe entre les points H et X.

Prolongeons BD et plaçons une droite DR égale à BD même; ſoit RK parallèle à DA ou BC, et ſuppoſons que les droites FA, BA, HE prolongées la rencontrent aux points M, Q, K; enfin, joignons RA et prolongeons cette droite juſqu'en P.

Puiſque DR eſt égale à DB, et que RQK eſt parallèle à DA, MA ſera égale à AN et de même QA égale à AB; mais l'angle BAR eſt droit, parce qu'il eſt dans un demicercle, car les trois droites DB, DA, DR ſont égales. Or, BQ et HEK ſont parallèles; donc les angles en P ſont droits, et auſſi HP ſera égale à PK. Donc le carré AH eſt égal au carré AE augmenté du rectangle
* 12.2. *Élém.*[46]) HEK *. Mais le même carré AH eſt auſſi égal aux carrés ſur G, ou AE, et ſur AB. Donc le carré AB ſera égal au rectangle KEH. Et pour cette raiſon KE eſt à AB comme AB à EH. Or, comme KE à AB, ou QA, ainſi EM eſt à MA: et comme AB à EH ainſi AF à FE. Donc EM eſt à MA comme AF à FE: Et par ſuite EA à AM comme EA à EF. Donc EF ſera égal à AM, et par conſéquent à AN. Donc auſſi FN eſt égal à AE, c'eſt-à-dire, à la droite donnée G. Ce qu'il fallait démontrer.

Soit de nouveau donné le loſange ADBC [Fig. 12], dont les côtés BD, BC ſont prolongés, et ſoit donnée la ligne G. Il s'agit de mener une droite NF paſſant par le ſommet A, et qui ſoit égale à cette ligne G.

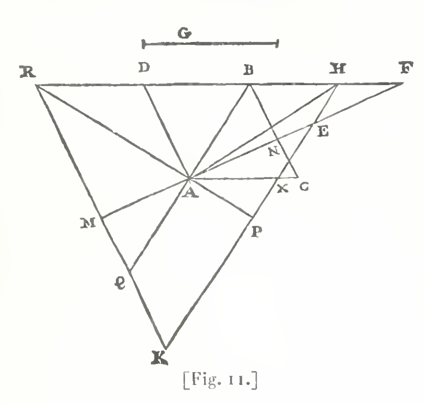
Traçons la diagonale BA, et plaçons y RAL à angles droits. Si donc G eſt donnée moindre que RL, le problème ne ſaurait être conſtruit, ainſi qu'il fut déjà dit plus haut [47]). Et ſi elle eſt égale, on a déjà fait ce qui était demandé. Soit donc G plus grande que RL. Dans la figure ci-jointe la conſtruction ſera telle, qu'il fut propoſé, et la démonſtration la même que dans le cas précédent.

---

[46]) Voir la note 15, p. 29 du Tome préſent.

Ducatur diameter AB, & quadratis ex G & AB ſit æquale quadratum AH, & ducatur HE ipſi BA parallela. Et AE ipſi G ponatur æqualis, eademque producatur ad F. Dico NF ipſi G æqualem eſſe.

Quod autem ad HE poni poteſt AE ipſi G æqualis, hinc manifeſtum eſt. Etenim quadratum AH majus eſt quadratis AX & XH, quum ſit angulus AXH obtuſus. Sed idem quadratum AH æquale ponitur quadratis AB ſeu HX & G. Itaque quadratum G ſeu AE majus eſt quadrato AX. Unde apparet interſectionem E accidere inter puncta H & X.



[Fig. 11.]

Producatur BD & ponatur ipſi æqualis DR. & ſit RK parallela DA vel BC, eique occurrant productæ FA, BA, HE, in punctis M, Q, K: & jungatur RA, & producatur ad P.

Quoniam igitur DR æqualis eſt DB, & RQK parallela DA, erit & MA æqualis AN, & QA æqualis AB; angulus autem BAR rectus, quum ſit in ſemicirculo, nam tres hæ æquales ſunt DB, DA, DR. Parallelæ autem ſunt BQ, HEK, ergo & anguli ad P recti, & erit HP æqualis PK. Eſt itaque quadratum AH æquale quadrato AE unà cum rectangulo HEK*. Sed idem quadratum AH æquale eſt etiam qua- * 12.2. *Elem.* [46]
dratis ex G ſeu AE, & ex AB. Itaque quadr. AB æquale erit rectangulo KEH. Ac propterea KE ad AB ut AB ad EH. Verùm ut KE ad AB ſeu QA ita eſt EM ad MA: & ut AB ad EH ita AF ad FE. Igitur EM ad MA ut AF ad FE: Et proinde EA ad AM ut EA ad EF. Æqualis eſt igitur EF ipſi AM; quare & ipſi AN. Ideoque & FN ipſi AE, hoc eſt, datæ G. Quod erat demonſtrandum.

Sit denuo datus rhombus ADBC [Fig. 12], cujus producta latera BD, BC; & data ſit linea G. Oportet ducere rectam NF tranſeuntem per angulum A, quæque æqualis ſit ipſi G.

Ducatur diameter BA, eique ad angulos rectos RAL. Si igitur G minor detur quam RL, problema conſtrui nequit, uti ſupra quoque dictum fuit [47]. Si verò

[47]) Voir l'en-tête du problème, p. 205 du Tome préſent.

Mais ici doit être démontré d'une autre manière que l'on peut placer contre la ligne HE une ligne AE égale à G. Soit RS égale à RB, et joignons AS. Puifque dans le triangle BAS on a mené la droite AR du fommet au milieu de la bafe, les carrés BR et RA pris enfemble, c'eft-à-dire le carré BA avec le double du carré AR, feront la moitié des carrés BA, AS *. Par fuite le double du carré AB avec le quadruple du carré AR, c'eft-à-dire avec le carré RL, fera égal aux carrés BA, AS. De forte que, ayant retranché de part et d'autre le carré BA, le carré AS fera égal aux carrés BA et RL, et par conféquent moindre que le carré AH; car celui-ci eft égal aux carrés AB et G. Donc AS eft plus petite que AH. Mais elle eft plus grande que AR. Donc le point S tombe entre R et H; car l'angle ARH eft obtus. Par conféquent RH eft plus grand que RS ou RB. Et comme, en vertu des triangles femblables, RH eft à HP comme RB à BA, HP fera auffi plus grand que BA; et le carré HP plus grand que le carré AB. Mais le carré HP avec le carré PA eft égal au carré AH, c'eft-à-dire aux carrés BA et G. Donc, comme le carré HP eft plus grand que le carré AB, le carré PA fera au contraire plus petit que le carré G. Il eft donc clair que, fi du point A comme centre on décrit une circonférence de rayon AE égal à G, elle coupera la ligne HE.

** d'après le livre 7. de Pappus [48]).*

Probl. VIII.

Trouver dans une conchoïde les limites de la courbure contraire [49]).

Nous connaiffons la conchoïde qu'imagina Nicomède, par laquelle il divifa l'angle en trois parties égales [50]) et trouva auffi deux moyennes proportionnelles [51]). Soit CQD [Fig. 13] [52]) cette ligne, G fon pôle, et AB la règle à l'aide de

---

[48]) Il s'agit de la „Propositio CXXII" du „Liber VII" des „Mathematicae Collectiones". On y lit (p. 234 verso de l'édition de Commandin): „Sit triangulum ABC, & ducatur quaedam recta linea AD, quae ipsam BC bifariam secet [in D]. Dico quadrata ex BA AC quadratorum ex AD DC dupla esse" (Hultsch, T. II, p. 856—857).

[49]) Voir, pour l'historique du problème, les p. 110—112 du Tome présent.

[50]) Voir la note 8, p. 86 du Tome présent.

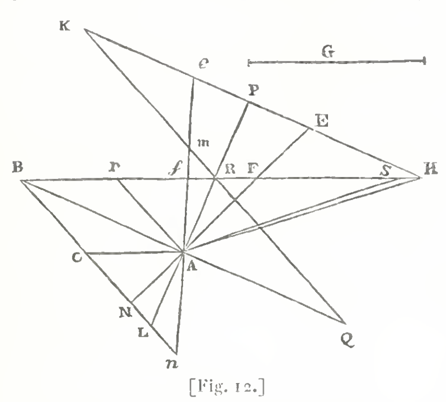
[51]) Voir la Pièce N° II, p. 13—15 du Tome présent.

[52]) Dans notre figure, reproduite par phototypie d'après l'original, la lettre D est renversée et la lettre O peu différente d'une C imparfaitement imprimée.

æqualis, jam factum eſt quod quærebatur. Sit igitur G major quam RL. Erit in ſchemate adjecto, ſicut propoſitum eſt, conſtructio & demonſtratio eadem quæ in caſu præcedenti.

Illud autem hic aliter eſt oſtendendum, quod ad lineam HE poni poteſt AE ipſi G æqualis. Sit RS æqualis RB, & jungatur AS. Quoniam igitur in triangulo BAS à vertice ad mediam baſin ducta eſt AR, erunt quadrata BR & RA ſimul ſumpta, hoc eſt, quadratum BA cum duplo quadrato AR, ſubdupla quadratorum BA, AS*. Itaque quadratum AB duplum cum quadruplo quadrato AR, hoc eſt, cum quadrato RL, æquabitur quadratis BA, AS. Quare ablato utrimque quadrato BA, erit quadratum AS æquale quadratis BA & RL, ac proinde minus quam quadr. AH; nam hoc æquale eſt quadratis AB & G. Eſt igitur AS minor quam AH. Sed major eſt quam AR. Ergo punctum S cadit inter R & H; angulus enim ARH obtuſus eſt. Major itaque eſt RH quam RS vel RB. Et quum propter triangulos ſimiles ſit RH ad HP ut RB ad BA, erit quoque HP major quam BA; & quadratum HP majus quadrato AB. At quadratum HP cum quadrato PA æquatur quadrato AH, hoc eſt, quadratis BA & G. Ergo cum quadratum HP ſit majus quadrato AB, erit invicem quadr. PA minus quam quadr. G. Patet igitur quod ſi centro A circumferentia deſcribatur radio AE ipſi G æquali, ea lineam HE ſecabit.

* *per* 122. *lib.* 7. *Pappi* [48]).



[Fig. 12.]

Probl. VIII.

In Conchoide linea invenire confinia flexus contrarii [49]).

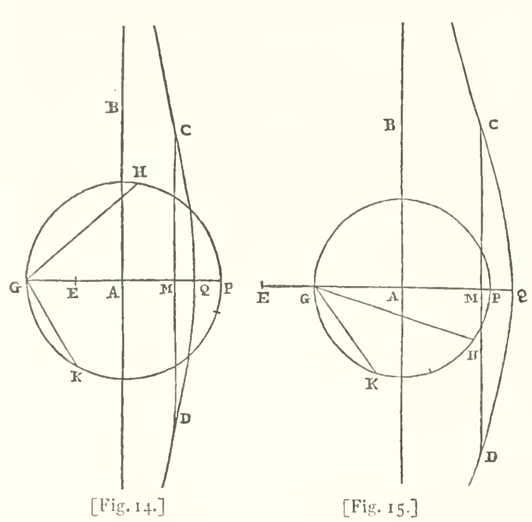
Conchoidem intelligimus quam Nicomedes excogitavit; quâ & angulum diviſit trifariam [50]), & duas medias invenit proportionales [51]). Eſto ea CQD,

laquelle elle a été décrite, et que GQ coupe à angles droits. Telle eſt donc la propriété de cette ligne que, ſi l'on mène vers elle une droite quelconque du point G, la partie de cette droite compriſe entre la conchoïde et la droite AB eſt égale à AQ.

Or, puiſqu'il apparaît qu'une certaine partie de la conchoïde, comme CQD dans la figure préſente, eſt concave vers le pôle G; mais que la ligne reſtante, prolongée de part et d'autre par manière de dire juſqu'à l'infini, eſt courbée en ſens contraire, on demande de quelle façon on pourrait déterminer les points où commence l'inflexion contraire. Et nous avons trouvé, en effet, pour cela la conſtruction ſuivante.

Soit aux deux droites AG, AQ une troiſième proportionnelle AE, à prendre du côté de G. Et plaçons GF égale à GE. Soit enſuite GR à angles droits ſur GQ et égale au double de GA. Et décrivons la parabole RO, dont le ſommet eſt R, l'axe RG et dont le paramètre eſt égal à AG. Du centre F et avec FR comme rayon décrivons une circonférence, qui coupe la parabole en O; et menons la droite OC, parallèle à AB, qui rencontre la conchoïde aux points C, D. Ceux-ci ſeront les points cherchés à la limite de la courbure contraire [53]).

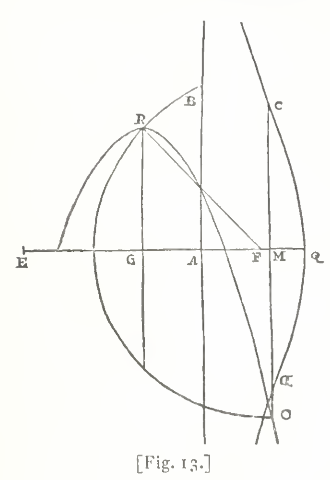
Cette conſtruction-là eſt générale. Mais ſi le carré ſur AQ n'eſt pas plus grand que le double du carré AG, nous effectuerons auſſi le problème par la triſection de l'arc [54]). Et cela de façon différente ſuivant que AQ ſera plus grande ou plus petite que AG. Car ſi elle eſt plus petite, on décrira une circonférence du centre A [Fig. 14] avec le rayon AG, et on y placera GK égale au double de GE, trouvée comme ci-devant. On prendra enſuite GM égale à la droite GH, qui ſous-tend le tiers de la circonférence KHG, et par M on mènera comme avant DC parallèle à AB. Mais ſi AQ eſt plus grande que AG [Fig. 15], les autres choſes ſeront faites de la même façon, mais il y aura cette différence, qu'il faut diviſer l'arc KP, qui avec l'arc GK complète une demi-circonférence, en trois parties égales, et déterminer une des parties PH, et prendre GM égale à la ſous-tendue GH.



[Fig. 14.] [Fig. 15.]

[Fig. 13] polus G, regula autem AB cujus ope deſcripta eſt; quam ſecet GQ ad angulos rectos. Hæc igitur lineæ proprietas eſt, ut ductâ ad ipſam rectâ qualibet ex G puncto, pars hujus inter conchoidem & rectam AB intercepta ſit ipſi AQ æqualis.

Quum autem appareat partem quandam Conchoidis ut in ſchemate ſubjecto CQD verſus polum G cavam eſſe, lineam verò reliquam in infinitum licet utrimque productam in diverſum curvari; quæſitum eſt qua ratione puncta ea determinari poſſent ubi contraria flexio initium capit. Et nos quidem ad hoc ſequentem invenimus conſtructionem.



[Fig. 13.]

Sit duabus AG, AQ tertia proportionalis AE, ſumenda verſus G. Et ponatur GF æqualis GE. Porro ſit GR ipſi GQ ad angulos rectos, & æqualis duplæ GA. Et deſcribatur parabole RO, cujus vertex ſit R axis RG, latus rectum ipſi AG æquale. Centro autem F radio FR circumferentia deſcribatur, quæ parabolen ſecet in O; & ducatur OC parallela AB occuratque conchoidi in punctis C, D. Hæc erunt puncta quæſita in confinio flexionis contrariæ [53]).

Iſta autem Univerſalis eſt conſtructio. At quando quadratum ex AQ non majus eſt quam duplum quadrati AG, arcus triſectione propoſitum quoque efficiemus [54]). Et diverſè quidem prout AQ major vel minor erit quam AG. Etenim ſi minor, deſcribenda eſt circumferentia centro A [Fig. 14] radio AG, in eaque ponendo GK æqualis duplæ GE, inventæ ut priùs. Et rectæ GH quæ ſubtendit trientem circumferentiæ KHG æqualis ſumenda GM, & per M ducenda ut ante DC ipſi AB parallela. Cum vero AQ major eſt quam AG [Fig. 15], cæteris ad eundem modum compoſitis, hæc tantum differentia erit quod arcum KP, qui unà cum arcu GK ſemicircumferentiam explet, in tria æqualia dividere oportet, & partium unam conſtituere PH, & ſubtenſæ GH æqualem ſumere GM.

[53]) Cette construction date du 25 septembre 1653, puisqu' on la retrouve avec l'analyse qui l'a amenée dans la pièce N° XX, p. 83—85 du Tome présent.

[54]) Les deux constructions qui suivent se retrouvent dans la même pièce du 25 septembre 1653 aux pages 85 et 86.

Enſuite le problème eſt plan [55]) lorſque AG égale AQ. Alors en effet il faut que GM ſoit égal au côté du triangle équilatère inſcrit dans le cercle. De même lorſque le carré AQ eſt double du carré AG: alors, en effet, GM eſt double de GA.

Mais il ſera encore plan dans d'autres cas innombrables, dont on pourra aiſément diſtinguer ceux, qui ſe réduiront à la triſection de l'angle.

FIN.

[55]) La considération des cas où le problème devient plan manque encore dans la pièce N° XX (p. 83—86 du Tome présent); mais on la trouve déjà dans une lettre à van Schooten du 23 octobre 1653 (p. 246 du T. I). De plus on y rencontre, comme aussi dans la pièce N° XX, mais biffée depuis, la remarque que, dans un certain sens, le problème serait toujours plan au cas où il se laisse exécuter à l'aide de la trisection de l'angle, puisqu' alors cette trisection pourrait s'accomplir à l'aide de la conchoïde même, qu'on suppose tracée. Sur cette remarque on peut consulter l'avant-dernier alinéa de la p. 7 du Tome présent, la note 10, p. 86 et la note 4, p. 232 du même Tome.

Porro planum eſt Problema [55]) cum AG æqualis AQ. Tunc enim GM ſit æqualis lateri trigoni ordinati in circulo inſcripti. Item cum quadratum AQ duplum eſt quadrati AG: ſit enim GM dupla ipſius GA.

Sed & aliis caſibus innumeris planum erit, quorum ii quidem facilè diſcerni poterunt, qui ad anguli triſectionem reducuntur.

ERRATA [56]).

Pag. 1. lin. 2. post *portioni*, interpone *semicirculo minori*. Item tribus hisce locis, Pag. 1. lin. 7. Pag. 3. lin. 3 à fine. Pag. 4. lin. 1. post *portio*, lege *semicirculo minor*. Pag. 30. in fig. mutetur P. n B. Pag. 43. lin. penult. lege 31415926533. Pag. 44. lin. 5. pro 3144. lege 3145.

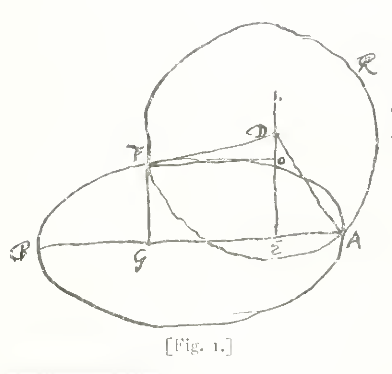
FINIS.

[56]) De ces „errata" nous avons tenu compte dans le texte; voir la note 1, p. 120, qui se rapporte aux pages 121 et 123; la figure 16, p. 161 et la page 179, l. 23 et l. 27.

APPENDICE I [1])

AUX „ILLUSTRIUM QUORUNDAM PROBLEMATUM CONSTRUCTIONES.".

SEPTEMBRE 1657.



[Fig. 1.]

Quomodo data qualibet Ellipsi duae mediae inter duas datas inveniri queant [2]).
Et quomodo breviſſimè per Ellipſin cujus latus tranſv. ſit triplum lateris recti [3]).

[PREMIÈRE PARTIE.]

1657. Sept. [4])

AFB eſt Ellipſis
AFR eſt circulus

[1]) La pièce est empruntée aux pages 2 et 3 du manuscrit N°. 13. Nous l'avons divisée en deux parties.

[2]) Voir la première partie qui contient la solution générale du problème de trouver les deux moyennes entre deux lignes données à l'aide d'une ellipse quelconque donnée d'avance.

Remarquons tout de suite que dans cette première partie la construction ne s'achève pas par l'ellipse donnée mais par une autre qui lui est semblable; mais il est clair que, par un artifice facile à deviner et qu'on trouve indiqué dans la seconde partie (p. 221), la construction peut être accommodée à l'ellipse même que l'on considère comme donnée.

[3]) Voir la seconde partie.

[4]) La date précise de l'invention de la construction qui va suivre est le 8 septembre 1657, comme cela résulte des pages 14—17 d'un petit livret où Christiaan Huygens a annoté sur la

AB ∞ a; l. rect. ∞ b; AE ∞ c; ED ∞ d; AG ∞ x [5]).

$a - x$ BG
x GA

l. transf. a ad l. rect. b ut $ax - xx$ ad $\frac{bax - bxx}{a}$ q.^{m} GF

sit $r \infty \sqrt{\frac{bax - bxx}{a}} \infty$ GF ∞ EO

q.^{m} AE q^m. ED q. FO

$$cc + dd \infty xx - 2\,cx + cc +$$
$$+ dd - 2\,dr + \frac{bax - bxx}{a} \text{ q.}^m \text{ DO}$$

[Fig. 1.]

$$r \infty \frac{xx - 2\,cx + bx - \frac{bxx}{a}}{2d}$$

$$r \infty \frac{axx - bxx - 2\,acx + abx}{2ad}; \text{ sit } a - b \infty q,\ 2c - b \infty p$$

$$r \infty \frac{qxx - pax}{2ad}$$

$$rr \infty \frac{abx - bxx}{a} \infty \frac{qqx^4 - 2qapx^3 + aappxx}{4aadd}$$

$$x^3 - \frac{2ap}{q}\,xx + \frac{aapp}{qq}\,x + \frac{4addb}{qq}\,x - \frac{4aaddb}{qq} \infty\ 0; \text{ sit } \frac{ap}{q} \infty n;\ \frac{a}{q} \infty \frac{n}{p}$$

première page: „Philippi Hugenij dum viveret". C'est son frère Philippe qui mourut le 14 mai 1657.

Or, aux pages citées, on retrouve, sous cette date du 8 septembre 1657, dans une forme moins bien arrangée, tous les calculs et la construction même de la première partie de la pièce présente avec la conclusion: Possumus igitur inter datas duas rectas, invenire duas medias proportionales, cujuslibet ellipsis datae ope. Sed commodissime si latus transversum fuerit triplum lateris recti.

On trouve encore aux pages 16, 22 et 29 du même manuscrit des calculs qui se rapportent au problème analogue où l'ellipse est remplacée par une hyperbole.

[5]) Partant de ces données, Huygens va déduire l'équation cubique qui détermine les abscisses des points d'intersection avec l'ellipse d'un cercle passant par le sommet A.

$$x^3 - 2nxx + nnx + \frac{4nddb}{pq}x - \frac{4nnddb}{pp} \infty 0$$ [6]).

rejicitur fecundus terminus ponendo $x - \frac{2}{3}n \infty y$

$$y^3 - \tfrac{1}{3}nny + \frac{4nddb}{pq}y + \tfrac{2}{27}n^3 + \tfrac{8}{3}\frac{nnddb}{pq} - \frac{4nnddb}{pp} \infty 0$$

ut eliminetur terminus fub y fit $\frac{1}{3}nn \infty \frac{4nddb}{pq}$.

$$\tfrac{1}{3}n \infty \tfrac{1}{3}\frac{ap}{q} \infty \frac{4ddb}{pq};\ \tfrac{1}{12}\frac{app}{b} \infty dd;\ \tfrac{1}{12}\frac{aqqnn}{aab} \infty dd.$$

$$\text{Sit } \nu \infty \tfrac{1}{3}n;\ \tfrac{3}{4}\frac{qq\nu\nu}{ab} \infty dd.$$

$$y^3 \infty \tfrac{1}{3}ann - \tfrac{8}{27}n^3$$

$$y^3 \infty 3a\nu\nu - 8\nu^3 \text{ fit } 3a - 8\nu \infty s;\ a \infty \tfrac{1}{3}s + \tfrac{8}{3}\nu$$

$$y^3 \infty \nu\nu s$$

Ergo y^3 ad ν^3 ut s ad ν [7]).

Ellipfeos l. tr. AB

latus rectus ∞b

$s \infty$ major datarum; $\nu \infty$ minor

oportet inter ipfas invenire duas medias proportionales

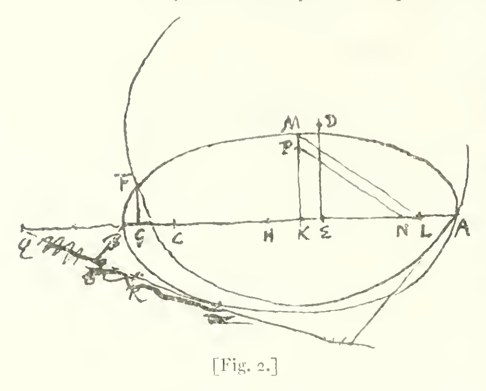
$$\frac{qn}{a} \infty p \infty 2c - b;\ qn \infty 2ac - ab;\ 3q\nu \infty 2ac - ab;\ \tfrac{3}{2}\frac{q\nu}{a} + \tfrac{1}{2}b \infty c$$

$$\tfrac{3}{4}\frac{qq\nu\nu}{ab} \infty dd;\ \tfrac{1}{3}s + \tfrac{8}{3}\nu \infty 3\nu + \frac{s-\nu}{3} \infty a.$$

[6]) L'équation cubique étant trouvée Huygens la réduit, dans ce qui suit, à la forme binomiale.

[7]) Ainsi $y = x - \frac{2}{3}n = \text{AG} - 2\nu$ est une des moyennes proportionelles entre ν et s. Il ne s'agit donc plus que d'arranger la construction de manière qu'on puisse partir des valeurs de ν et s comme données; mais, puisqu'on a: $a = \frac{1}{3}s + \frac{8}{3}\nu$ et que l'on connaît le rapport $b:a$, il est permis dès l'abord de traiter a et b et aussi $q = a - b$ comme données. On doit donc exprimer dans ces données a, b, q, ν et s les valeurs de $\text{AE} = c$ et $\text{ED} = d$; ce qui permettra de tracer le cercle et de trouver la moyenne proportionnelle y.

Conſtructio univerſalis data qualibet Ellipſi [Fig. 2].



[Fig. 2.]

HQ ∞ *s*. HC ∞ *v*. CB ∞ ∞ $\frac{1}{3}$CQ. CA ∞ $3v$ ∞ 3CH [8]). AL ∞ $\frac{1}{2}b$. BK ∞ KA. Ergo KL ∞ $\frac{1}{2}q$. BA ad AC ut KL ad LE ∞ $\frac{3}{2}\frac{qv}{a}$. KP ∞ ∞ HC ∞ *v*. PN parall. ML. ED ∞ $\sqrt{\frac{3}{4}\text{KNq.}^{m}}$ [9]) ∞ $\sqrt{\frac{3}{4}\frac{qqvv}{ab}}$ ∞ *d*.

D eſt centr. circuli AF. FG perp. BA. HG eſt minor duarum mediarum ∞ *y* [10]).

[SECONDE PARTIE].

Si ponatur $b \infty \frac{1}{3}a$ Erit $q \infty \frac{2}{3}a$. Quia $\frac{3qqvv}{4ab} \infty dd$; $\frac{\frac{4}{3}aavv}{\frac{4}{3}aa} \infty vv \infty dd$; $v \infty d$.

Et quia $\frac{3}{2}\frac{qv}{a} + \frac{1}{2}b \infty c$ erit $v + \frac{1}{2}b \infty c$; $v + \frac{1}{6}a \infty c$.

Ergo in Ellipsi cujus latus tranſverſum triplum eſt lateris recti. Sumitur AL ∞ ∞ $\frac{1}{6}$ AB [11]). LE ∞ v ∞ HC. (nam ſic ſit AE ∞ $v + \frac{1}{6}a \infty c$). Et ED ∞ ∞ EL ∞ v [12]).

[8]) De cette manière $a = \text{AB} = \text{CB} + \text{CA} = \frac{1}{3}(s-v) + 3v$.

[9]) On a, par construction, $\text{KN} = \text{KL} \times \text{KP} : \text{MK} = \frac{1}{2}vq : \text{MK}$; mais:

l. trans. (a) : l. rect. $(b) = \text{KB} \times \text{KA}\ (\frac{1}{4}a^2) : \text{MK}^2$;

donc $\text{MK}^2 = \frac{1}{4}ab$; $\text{KN}^2 = \frac{1}{4}v^2q^2 : \frac{1}{4}ab = v^2q^2 : ab$ et enfin $\text{ED}^2 = \frac{3}{4}q^2v^2 : ab = d^2$.

[10]) On a, en effet, $\text{HG} = \text{AG} - \text{AH} = x - (\text{AC} - \text{CH}) = x - 2v = x - \frac{2}{3}n = y$.

[11]) Voir encore la Fig. 2. Les points A et B sont supposés construits d'après les indications qu'on trouve au début de la „Constructio universalis".

[12]) On retrouve cette construction sous une forme plus achevée dans la lettre du 12 octobre 1657 à de Sluse (p. 67 du T. II), et sur une feuille détachée où elle est comme il suit:

„mea Constructio.

HQ [voir toujours la figure 2 du texte] major, HC minor extremarum. CB ∞ $\frac{1}{3}$ CQ HA ∞ 2 HC. BMA ellipſis axe BA, latere recto ∞ $\frac{1}{3}$ BA. AL ∞ $\frac{1}{6}$ AB ſive $\frac{1}{2}$ l. rect. LE ∞ HC. ED ∞ HC perpend. AB. AF est circulus centro D.

FG perpend. AB. HG eſt minor duarum mediarum."

Data autem certa primum Ellipſi et dein duabus quibuſvis rectis RS, RT [Fig. 3], inter quas duae mediae ſint reperiendae. Oportet ſumere SV ∞ $\frac{1}{3}$ differentiae ST. Et RX ∞ 2 SR. Tum BA diameter ſecunda [Fig. 2] eſt proportionaliter in C et H ſicut VX [Fig. 3] in S et R ſecta eſt. unde etiam inventâ mediâ HG [Fig. 2] oportet facere ſicut HC ad HG ita RS [Fig. 3] ad RY. Eritque RY minor mediarum inter RS, RT. Et hoc ad utramque conſtructionem pertinet [13]).

[Fig. 3].

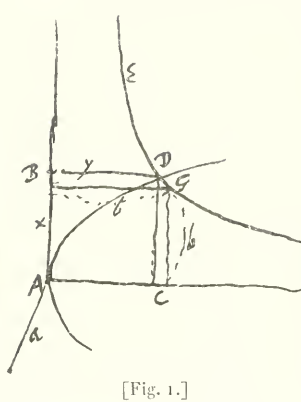
[13]) C'est-à-dire: l'artifice employé ici (et dont nous avons déjà parlé dans la note 2) peut servir aussi pour la construction universelle de la première partie.

APPENDICE II[1]

AUX „ILLUSTRIUM QUORUNDAM PROBLEMATUM CONSTRUCTIONES."

[1657].

Miratus ſum aliquando, qua ratione veteres in conſtructiones eas inciderint, quae fiunt per interſectionem duarum conicarum ſectionum [2]). Puto autem hac ratione inventas eſſe.



[Fig. 1.]

Primum ad cubi duplicationem eſt hujusmodi aequatio $x^3 \infty abb$. Ergo $\frac{xx}{a} \infty \frac{bb}{x}$. Sit $y \infty$ $\infty \frac{xx}{a}$; $ay = xx$. Ergo et $\frac{bb}{x} \infty y$; $bb \infty xy$.

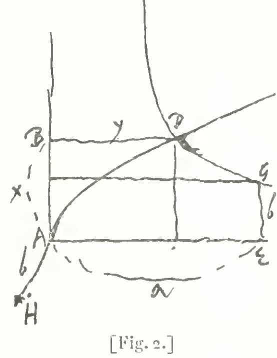
Deſcripta ad axem AC parabola AD cujus latus rectum ∞ a, ductaque AB perp. ad AC apparet ſi ſumatur in ea quaelibet longitudo AB ∞ x. fore BD, quae parallela eſt AC, ∞ y, ex aequatione $ay \infty xx$. At ex altera aequatione $bb \infty xy$, apparet, ſumpta x pro arbitrio, quoniam □m xy ſive AB, BD ∞ xy, fore D ad hyperbolen in asymptotis AB, AC, per

[1]) La pièce est empruntée aux pages 4 et 5 du manuscrit N°. 13. Huygens y donne plusieurs solutions du problème des deux moyennes proportionnelles.

[2]) Comparez la p. 191 du Tome présent au début du Probl. III. Il s'agit surtout des deux solutions de Ménechme, qu'on trouve p. 20—21 du texte Latin des Commentaires d'Eutocius de l'édition de Bâle, citée T XI, p. 274, note 3 (Heiberg, T. III, p. 92—99).

angulum G, qu.' bb. Sed x in utraque aequatione eft eadem. Ergo parabolae et hyperbolae interfectio determinat punctum D, ut fiat DC, vel AB $\infty\ x$.

b ad x ut $\frac{xx}{b}$ ad a; AB eft media proxima extremae b. BD autem non eft altera mediarum [3]). fed haec facile invenitur.



[Fig. 2.]

Aliter. $x^3 \infty\ abb$; $y \infty \frac{xx}{b} \infty \frac{ab}{x} \infty\ y$;

$by \infty\ xx \qquad ab \infty\ xy$

datae funt AH $\infty\ b$. AE $\infty\ a$ ∠BAE rectus. AD est parab. à latere recto b. DG eft hijperbole per G. facto rectangulo AG $\infty\ ab$. Mediae funt AB, BD.

Haec Menechmi eft Conftuctio [4]) itemque altera quae fequitur [5]).

$x^3 \infty\ abb$; $x^4 \infty\ abbx$; $\frac{x^4}{bb} \infty\ ax$.

$y \infty \frac{xx}{b} \infty \sqrt{ax} \infty\ y$

$by \infty\ xx \qquad ax \infty\ yy$

C et E funt datae. ∠BAF rectus. AKD parabola à latere recto b. ALD parabola à latere recto a. mediae AB, AF [5]).

[Fig. 3.]

[3]) Comparez la solution suivante où les deux moyennes sont indiquées immédiatement toutes les deux par le point d'intersection.

[4]) C'est la première de ses solutions.

[5]) C'est la seconde solution de Ménechme.

$$x^3 \infty abb;\ ax^3 \infty aabb$$

$$yy \infty ax \infty \frac{aabb}{xx} \infty yy$$

$$\frac{ab}{x} \infty y;\ ab \infty xy$$

Hyperbole eadem quae ſuperius in prima Menechmi conſtructione, Parabola vero à latere recto *a*.

Hanc methodum poſtea ulterius excolens inveni ſolidorum omnium problematum conſtructiones meliores ijs quas docet Sluſius in Meſolabo. Exemplum dedi in problemate illo Apollonij Pergei, de breviſſima recta a dato puncto ad coni ſectionem ducenda [6]).

[6]) Ce dernier alinéa doit dater de 1682. Huygens fait allusion à un ouvrage inédit intitulé: „Constructio problematum solidorum per resolutionem aequationis in duos Locos", que nous publierons à sa propre place.

APPENDICE III[1]

AUX „ILLUSTRIUM QUORUNDAM PROBLEMATUM CONSTRUCTIONES."

[JUILLET 1659].

[PREMIÈRE PARTIE].

De inveniendis duabus medijs proportionalibus.

$$x^3 \propto abb;\ x^4 \propto abbx;\ \frac{x^4}{bb} \propto ax$$

addatur utrinque $-\frac{2cxx}{b} + cc$

$$yy \propto \frac{x^4}{bb} - \frac{2cxx}{b} + cc \propto ax - \frac{2cxx}{b} + cc \propto yy$$

$$y \propto \frac{xx}{b} - c$$

[1]) La pièce, que nous avons divisée en quatre parties, est empruntée à quelques feuilles qui ont été détachées par Huygens du livre A des Adversaria. Le revers de la dernière feuille porte la date du 28 juillet 1659; il contient des calculs que nous mentionnerons plus bas dans la note 11 de l' Appendice IV, p. 235 du Tome présent.

En composant cette pièce, Huygens s'est appliqué surtout à retrouver par l'analyse les constructions exposées par de Sluse dans la première édition de son „Mesolabum seu duæ mediæ proportionales inter datas per circulum et ellipsim vel hyperbolam infinitis modis exhibitæ. Accedit problematum quorumlibet solidorum effectio per easdem curvas, ijsdem modis & appendix de eorum solutione per circulum et parabolam. Leodij Eburorum. Typis I. F. van Milst. CIↃ IↃC LIX". in 4°. Voir sur cette édition la note 65, p. 105 du Tome présent.

Sit $2c \infty b$

$$y \infty \frac{xx}{b} - \tfrac{1}{2} b;\ \sqrt{by + \tfrac{1}{2} bb} \infty x.$$ Parabola.

$$xx \infty ax + \tfrac{1}{4} bb - yy;\ x \infty \tfrac{1}{2} a + \sqrt{\tfrac{1}{4} aa + \tfrac{1}{4} bb - yy}.$$ Circulus.

Modus 1. Conſtructio Carteſij [2]).

$$\frac{x^4}{bb} \infty ax$$

$$yy \infty \frac{x^4}{bb} - \frac{2axx}{b} + aa \infty ax - \frac{2axx}{b} + aa \infty yy$$

$$y \infty a - \frac{xx}{b};\ xx \infty ab - by;\ x \infty \sqrt{ab - by}$$ Parabola

$$\frac{abx + aab - byy}{2a} \infty xx;\ \tfrac{1}{2} bx + \tfrac{1}{2} ab - \tfrac{1}{2} \frac{byy}{a} \infty xx;\ \tfrac{1}{4} b + \sqrt{\tfrac{1}{16} bb + \tfrac{1}{2} ab - \tfrac{1}{2} \frac{b}{a} yy} \infty x$$

Ellipſis.

Modus 2.

$$yy \infty \frac{x^4}{bb} - 2xx + bb \infty ax - 2xx + bb \infty yy$$

$$y \infty \frac{xx}{b} - b;\ by + bb \infty xx;\ \sqrt{by + bb} \infty x$$ Parabola

$$\tfrac{1}{2} ax + \tfrac{1}{2} bb - \tfrac{1}{2} yy \infty xx;\ \tfrac{1}{4} a + \sqrt{\tfrac{1}{16} aa + \tfrac{1}{2} bb - \tfrac{1}{2} yy} \infty x$$ Ellipſis

[2]) Il s'agit de la construction, à l'aide du cercle et de la parabole, donnée par Descartes au Livre III de sa „Géométrie" (p. 469—470 du T. VI de l'édition d'Adam et Tannery) sous le titre „L'inuention de deux moyenes proportionelles." En effet, on vérifie aisément que la construction amenée par les formules du texte est identique avec celle de Descartes. Après ce premier succès de la méthode analytique qu'il vient de découvrir, Huygens procède à en chercher de nouvelles applications.

axis min. $\sqrt{\frac{1}{4}aa+2bb}$; l.[atus] r.[ectus] $\infty \sqrt{\frac{1}{8}aa+bb}$; l. tr. $\infty \sqrt{\frac{1}{2}aa+4bb}$ recti scilicet duplum.

Modus 3. Optima [3])

$$4yy \infty \frac{x^4}{bb} - 4xx + 4bb \infty ax - 4xx + 4bb \infty 4yy$$

$$2y \infty \frac{xx}{b} - 2b; \sqrt{2by+2bb} \infty x \text{ Parabola}$$

$$\tfrac{1}{4}ax + bb - yy \infty xx, \tfrac{1}{8}a + \sqrt{\tfrac{1}{64}aa+bb-yy} \infty x \text{ circulus}$$

Modus 4.

$$\tfrac{1}{4}yy \infty \frac{x^4}{bb} - \tfrac{1}{4}xx + \tfrac{1}{64}bb \infty ax - \tfrac{1}{4}xx + \tfrac{1}{64}bb \infty \tfrac{1}{4}yy$$

$$\tfrac{1}{2}y \infty \frac{xx}{b} - \tfrac{1}{8}b; \tfrac{1}{2}by + \tfrac{1}{8}bb \infty xx; \sqrt{\tfrac{1}{2}by+\tfrac{1}{8}bb} \infty x \text{ parabola.}$$

$$4ax + \tfrac{1}{16}bb - yy \infty xx; 2a + \sqrt{4aa+\tfrac{1}{16}bb-yy} \infty x \text{ circulus}$$

Modus 5.

$$4yy \infty \frac{x^4}{bb} - 2xx + bb \infty ax - 2xx + bb \infty 4yy$$

$$2y \infty \frac{xx}{b} - b; \sqrt{2yb+bb} \infty x \text{ parabola}$$

$$\tfrac{1}{2}ax + \tfrac{1}{2}bb - 2yy \infty xx; \tfrac{1}{4}a + \sqrt{\tfrac{1}{16}aa+\tfrac{1}{2}bb-2yy} \infty x \text{ Ellipsis}$$

[3]) Probablement Huygens préfère cette construction à la précédente à cause de la relation entre l'axe et le paramètre de l'ellipse; ce qui permettrait d'exécuter toutes les constructions de moyennes proportionnelles à l'aide d'une seule ellipse construite d'avance, c'est-à-dire, en se servant de l'artifice mentionné dans la note 2, p. 217 du Tome présent.

maj. axis $\sqrt{\frac{1}{4}aa+2bb}$; $\sqrt{\frac{1}{2}aa+4bb}$ l. r.; $\sqrt{\frac{1}{8}aa+bb}$ l. tr.

Modus 6.

Ex his duobis modis fit conftructio folio fequenti verfo [4]).

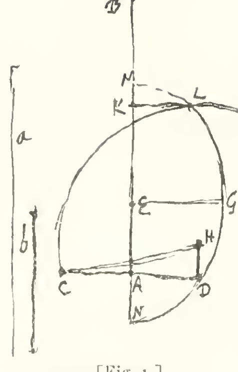
$$\frac{ccyy}{bb} \infty \frac{x^4}{bb} - \frac{ccxx}{bb} + \frac{1}{4}\frac{c^4}{bb} \infty ax - \frac{ccxx}{bb} + \frac{1}{4}\frac{c^4}{bb} \infty \frac{ccyy}{bb}$$

$$cy \infty xx - \frac{1}{2}cc; \sqrt{cy+\frac{1}{2}cc} \infty x \text{ parabola quaelibet}$$

$$yy \infty \frac{bbax}{cc} - xx + \frac{1}{4}cc; xx \infty \frac{bbax}{cc} + \frac{1}{4}cc - yy; x \infty \frac{1}{2}\frac{abb}{cc} +$$

$$+ \sqrt{\frac{1}{4}\frac{aab^4}{c^4} + \frac{1}{4}cc - yy} \text{ circulus}$$

Modus 7.



[Fig. 1.]

Ex modo 4° et 6° haec inventa eft conftr°. [5])

AB[a] maj. CD[b] min. extremarum. CA ∞ AD. ∠BAD rectus.

AE ∞ $\frac{1}{4}$ AB; EN vel EM qu. ∞ qu. EA + 2 qu. AD.

EG qu. ∞ $\frac{1}{2}$ qu. EM.

NGM eft ellipfis, axis MN.

DH ∞ $\frac{1}{2}$ AE ∞ $\frac{1}{8}$ AB.

CL eft circulus centro H.

Interfectio L. LK perpend. AB. AK eft minor duarum mediarum.

NB. hinc data ellipfi cujus latus rectum fit dimidium tranfverfi inter datas extremas duae mediae facili conftructione habentur.

[4]) Voir plus loin, à la page présente, après le „modus 7". Il s'agit des „modus 4 et modus 6".

[5]) Voici comment: Les paraboles des modes 4 et 6 sont égaux, mais leurs sommets se trouvent sur l'axe des y à des distances inégales b et $\frac{1}{2}$ b de l'origine des coordonnées. Si donc on fait subir la première parabole *avec le cercle qui la coupe* une translation $\frac{1}{2}$ b dans la direction de l'axe des y, elle couvrira la seconde parabole et le point d'intersection avec le cercle tombera nécessairement sur celui de la seconde parabole avec l'ellipse, puisque ces points doivent avoir la même distance à l'axe des y, laquelle distance est égale à la moyenne cherchée. On peut donc

$$yy \infty \frac{x^4}{bb} - \frac{cxx}{b} + \tfrac{1}{4}cc \infty ax - \frac{cxx}{b} + \tfrac{1}{4}cc \infty yy$$

$$y \infty \frac{xx}{b} - \tfrac{1}{2}c; \sqrt{by + \tfrac{1}{2}bc} \infty x \text{ parabola}$$

$$\frac{bax + \frac{1}{4}ccb - byy}{c} \infty xx; \tfrac{1}{2}\frac{ab}{c} + \sqrt{\tfrac{1}{4}\frac{aabb}{cc} + \tfrac{1}{4}cb - \frac{b}{c}yy} \infty x \text{ Ellipsis quaelibet}$$

Modus 8.

Ex hoc modo et primo, oritur Constructio universalis Slusij [6]), per circulum et ellipsin. Ex eo quod utriusque parabolam latus rectum est idem nempe ∞ *b*.

[Fig. 2.]

[SECONDE PARTIE].

Secare AD in C, ut sit qu. QA ad qu. AC ut AC ad CD [7]).

$$aa \text{ ad } xx \text{ ut } x \text{ ad } b - x$$

$$x^3 \infty aab - aax$$

$$x^4 \infty aabx - aaxx$$

$$\frac{x^4}{aa} \infty bx - xx$$

$$yy \infty \frac{x^4}{aa} \infty bx - xx \infty yy$$

$$y \infty \frac{xx}{a}; ay \infty xx; \sqrt{ay} \infty x \text{ parabola}$$

$$bx - xx \infty yy; bx - yy \infty xx; \tfrac{1}{2}b + \sqrt{\tfrac{1}{4}bb - yy} \infty x \text{ circulus}$$

---

supprimer la parabole et déterminer ce point d'intersection à l'aide de l'ellipse et du cercle, pourvu que le centre du cercle du mode 4 soit déplacé sur une distance $\frac{1}{2}b$; ce qui amène facilement la construction du texte. Toutefois Huygens n'est pas encore satisfait, puisque la „Propositio Prima" de de Sluse apprend de construire la moyenne cherchée à l'aide d'un cercle et d'une ellipse „infinitis modis", c'est-à-dire à l'aide d'une infinité d'ellipses *différentes*. C'est pourquoi il procède au mode 8, où une constante arbitraire est introduite.

[6]) La „Propositio prima" citée dans la note précédente, qu'on trouve à la page 3 de la première et de la seconde édition du „Mesolabum". On l'obtient en effet par l'artifice même exposé dans la note précédente, en observant que la parabole du „modus 8" est égale, cette fois, à celle du mode 1.

[7]) Dans sa „Propositio septima" (p. 27 de la première, p. 22 de la seconde édition du „Mesola-

$$yy \infty \frac{x^4}{aa} + \frac{cxx}{a} + \tfrac{1}{4}cc \infty bx - xx + \frac{cxx}{a} + \tfrac{1}{4}cc \infty yy$$

$$y \infty \frac{xx}{a} + \tfrac{1}{2}c; \sqrt{ay - \tfrac{1}{2}ac} \infty x \text{ parabola}$$

$$abx + \tfrac{1}{4}acc - ayy \infty axx - cxx; \frac{abx}{a-c} + \tfrac{1}{4}\frac{acc}{a-c} - \frac{ayy}{a-c} \infty xx; a - c \infty d;$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{ba}{d} + \sqrt{\tfrac{1}{4}\frac{aabb}{dd} + \tfrac{1}{4}\frac{acc}{d} - \frac{ayy}{d}} \infty x \text{ Ellipſis.}$$

Ex hoc et ſuperiori oritur conſtr.° propoſitionis 7.ae Sluſij in Meſolabo.

[Troisième partie.] [8])

aa ad xx ita x ad $x - b$

$x^3 \infty aax - aab$. Aequatio triſectionis anguli [9]).

$$\frac{x^4}{aa} \infty xx - bx$$

$$yy \infty \frac{x^4}{aa} - 2xx + aa \infty - xx - bx + aa \infty yy$$

$$y \infty \frac{xx}{a} - a; \sqrt{ay + aa} \infty x \text{ parabola}$$

$$- bx + aa - yy \infty xx; - \tfrac{1}{2}b + \sqrt{\tfrac{1}{4}bb + aa - yy} \infty x \text{ Circulus.}$$

---

bum") de Sluse résolut ce problème à l'aide du cercle et d'une ellipse „infinitis modis". Huygens se propose de retrouver cette solution. A cet effet il commence à chercher une solution à l'aide du cercle et de la parabole; ensuite une autre par une parabole du même paramètre et d'une ellipse de figure quelconque. Après cela il supprime la parabole et il obtient la solution désirée.

[8]) Dans cette troisième partie il s'agit de la „Propositio undecima" (p. 39 de la première, 31 de la seconde édition) de de Sluse, laquelle est comme il suit: „Datis duabis rectis P, & Q, invenire tertiam ut X, ad cujus quadratum, quadratum datæ P eandem habeat rationem, quæ est ipsius X, ad excessum X, supra Q." Ici encore le même artifice va conduire Huygens à la solution de de Sluse.

[9]) Soit r le rayon du cercle, q la corde de l'arc de l'angle donné, x celle de la troisième partie de cet arc, alors: $x^3 = 3r^2x - qr^2$. Comparez le livre III de la „Geométrie" de Descartes, à l'article: „La façon de diviser un angle en trois" (T. VI, p. 470 de l'édition d'Adam et Tannery).

$$yy \propto \frac{x^4}{aa} - \frac{cxx}{a} + \tfrac{1}{4}cc \propto -bx + xx - \frac{cxx}{a} + \tfrac{1}{4}cc \propto yy$$

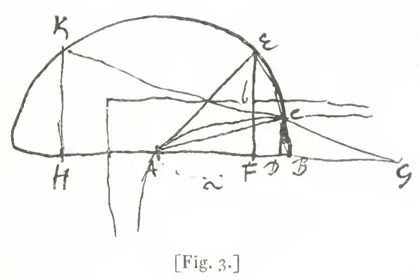
$$y \propto \frac{xx}{a} - \tfrac{1}{2}c; \sqrt{ay + \tfrac{1}{2}ac} \propto x \text{ parabola}$$

$$-abx + axx - cxx + \tfrac{1}{4}acc \propto ayy; -\frac{abx}{c-a} + \tfrac{1}{4}\frac{acc}{c-a} - \frac{ayy}{c-a} \propto xx; c-a \propto d;$$

$$-\tfrac{1}{2}\frac{ab}{d} + \sqrt{\tfrac{1}{4}\frac{aabb}{dd} + \tfrac{1}{4}\frac{acc}{d} - \frac{ayy}{d}} \propto x \text{ Ellipſis.}$$

Ex his oritur conſtructio Sluſij propoſ.^e undecima per circulum et ellipſin.

[QUATRIÈME PARTIE] [10]).



[Fig. 3.]

AF [11]) $\propto a$; $FE \propto b$; $AD \propto y$; $DC \propto x$

$GD\ (\sqrt{aa+bb-xx})$ ad $DC\ (x)$ ut $GH\ (a + 2\sqrt{aa+bb-xx})$ ad $HK\ (b)$

$$b\sqrt{aa+bb-xx} \propto ax + 2x\sqrt{aa+bb-xx}$$

$$\sqrt{aa+bb-xx} \propto \frac{ax}{b-2x}$$

$$yy \propto aa+bb-xx \propto \frac{aaxx}{bb-4bx+4xx} \propto yy$$

$$x \propto \sqrt{aa+bb-yy} \text{ Circulus}$$

$$\frac{ax}{b-2x} \propto y;\ ax \propto by - 2xy;\ -\tfrac{1}{2}ax + \tfrac{1}{2}by \propto xy \text{ Hyperbole.}$$

Ex his conſtructio oritur propoſitionis 13 Sluſij. qua triſecat angulum per hyperbolam.

---

[10]) Dans cette partie Huygens retrouve la trisection de l'angle, telle qu'elle fut exécutée à l'aide de l'intersection d'un cercle avec une hyperbole équilatère dans la 13e proposition de de Sluse, p. 45 de la première, p. 36 de la seconde édition du „Mesolabum".

[11]) La figure, avec omission de plusieurs lignes, est empruntée par Huygens à celle de de Sluse. On y a DG = AD; donc ∠KCA = 2∠CAB = $\frac{2}{3}$ ∠EAB. De même ∠KAH + ∠CAB = = 2 ∠KCA = $\frac{4}{3}$ ∠EAB; donc encore ∠KAH = $\frac{4}{3}$ ∠EAB — $\frac{1}{3}$ ∠EAB = ∠EAB et par conséquent KH = EF = b.

APPENDICE IV [1])

AUX „ILLUSTRIUM QUORUNDAM PROBLEMATUM CONSTRUCTIONES."

[1659].

[GA ∞ b; AQ ∞ c; AE ∞ a; FE ∞ d; AC ∞ y] [2])

$$\text{q. CF } dd - aa + 2\,ay - yy \;\infty\; \frac{bbcc + 2bccy - bbyy + ccyy - 2by^3 - y^4}{yy} \text{ [3]) q. CF}$$

$$\begin{array}{l} 2\,ay^3 + ddyy - 2\,bccy - bbcc \;\infty\; 0 \\ 2\,by^3 - aayy \\ \qquad + bbyy \\ \qquad - ccyy \end{array}$$

$$\begin{array}{l} y^3 + ddyy - 2\,bccy - bbcc \;\infty\; 0 \text{ [4])} \\ \quad - aa \\ \quad + bb \\ \quad - cc \\ \qquad\qquad \overline{2a + 2b} \end{array}$$

[Fig. 1.]

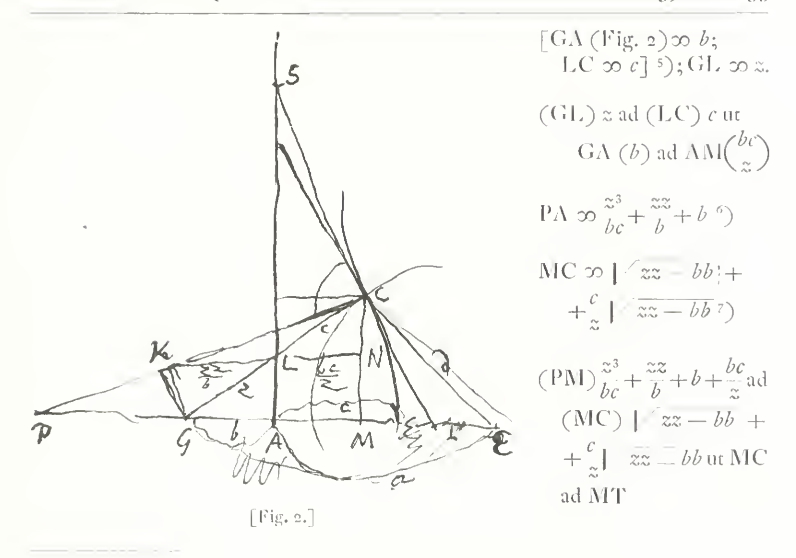
[1]) Cet appendice a été emprunté aux pages 123—131 du livre A des „Adversaria". Il contient la solution d'août 1659 du problème „In conchoide linea invenire confinia flexus contrarii." Voir, pour l'historique de cette solution, l'Avertissement à la page 110—111.

[2]) Nous avons ajouté ces indications.

[3]) Cette seconde valeur de CF^2 découle des propriétés de la conchoïde. On la retrouve p. 83 du Tome présent. Elle est égalée à la première pour trouver l'équation cubique qui donne les intersections de la conchoïde avec un cercle ayant E pour centre.

[4]) Cette équation cubique:

$$y^3 + \frac{d^2 - a^2 + b^2 - c^2}{2\,(a+b)}\,y^2 - \frac{bc^2}{a+b}\,y - \frac{b^2c^2}{2\,(a+b)} = 0$$



[Fig. 2.]

[GA (Fig. 2) ∞ b; LC ∞ c] [5]); GL ∞ z.

(GL) z ad (LC) c ut GA (b) ad AM$\left(\frac{bc}{z}\right)$

PA ∞ $\frac{z^3}{bc}+\frac{zz}{b}+b$ [6])

MC ∞ $\sqrt{zz-bb}+$ $+\frac{c}{z}\sqrt{zz-bb}$ [7])

(PM) $\frac{z^3}{bc}+\frac{zz}{b}+b+\frac{bc}{z}$ ad (MC) $\sqrt{zz-bb}+$ $+\frac{c}{z}\sqrt{zz-bb}$ ut MC ad MT

---

sera comparée plus loin avec celle qui détermine le point d'inflexion de la conchoïde. Remarquons tout de suite qu'on en peut faire disparaître le second terme en posant $d^2=a^2-b^2+c^2$; substituant ensuite $y=kx$, on peut identifier, par un choix convenable de k et de a l'équation obtenue avec une équation cubique quelconque sans second terme. On peut donc à l'aide des intersections d'un cercle et d'une conchoïde donnée d'avance, résoudre chaque problème menant à une équation cubique; pourvu seulement que la valeur obtenue de a satisfasse à l'inégalité $a^2+c^2>b^2$, ce qui n'est pas toujours le cas, et que de plus le cercle, qu'on obtient, coupe réellement la conchoïde donnée. Comparez la note 16 de la pièce présente et la note 10 p. 86 du Tome présent.

5) Ces notations, que nous avons ajoutées, correspondent avec celles de la figure précédente. Dans ce qui suit Huygens va calculer la valeur de AT, laquelle, au point d'inflexion, doit être maximale, CT étant la tangente de la conchoïde au point C.

6) La normale PC à la conchoïde est supposée avoir été construite d'après la manière qu'on trouvera décrite plus loin dans les „Contributions aux commentaires de van Schooten sur la Geometria Renati Dercartes"; c'est-à-dire le point K a été trouvé en tirant LK parallèle à PA et GK perpendiculaire à GC. On a donc, à cause de la similitude des triangles LNC et LGK, LN $\left(\frac{bc}{z}\right)$: LC (c) = LG (z): LK $\left(\frac{zz}{b}\right)$ et ensuite LC (c): CG $(z+c)$ = KL $\left(\frac{zz}{b}\right)$: PG $\left(\frac{z^3}{bc}+\frac{zz}{b}\right)$; donc PA = PG + GA = $\frac{z^3}{bc}+\frac{zz}{b}+b$.

7) Puisqu'on a MC = MN + NC où MN = $\sqrt{GL^2-GA^2}=\sqrt{zz-bb}$ et NC = $\frac{c}{z}\times$ AL par similitude de triangles.

$$\text{MT} \; \frac{zz - bb + \frac{2c}{z}zz - \frac{2c}{z}bb + cc - \frac{ccbb}{zz}}{\frac{z^3}{bc} + \frac{zz}{b} + b + \frac{bc}{z}}$$

$$\frac{z^4 - bbzz + 2\,cz^3 - 2\,cbbz + cczz - ccbb}{zz} \quad \text{div. } z + c$$

$$\frac{z^4 + cz^3 + bbcz + bbcc}{bcz} \quad \text{div. } z + c$$

$$\frac{bcz^3 + bcczz - b^3cz - b^3cc}{z^4 + bbcz} \; \text{MT}$$

$$\text{AT} \propto \text{MT} + \text{AM} \propto \frac{bcz^3 + bcczz - b^3cz - b^3cc}{z^4 + bbcz} + \frac{bc}{z}$$

$$\frac{2bcz^3 + bcczz - b^3cz}{z^4 + bbcz}$$

$\dfrac{2bczz + bccz - b^3c}{z^3 + bbc} \propto$ maximum unde hinc per regulam de max. et minimis [8])

$$0 \propto 2bcz^5 + 2bccz^4 - 3b^3cz^3 - 4b^3cczz - b^3c^3z$$
$$0 \propto 2z^4 + 2cz^3 - 3bbzz - 4bbcz - bbcc \quad \text{div. } z + c$$
$$2z^3 - 3bbz - bbc \propto 0$$

$z^3 - \frac{3}{2}bbz - \frac{1}{2}bbc \propto 0$ hinc etiam constr. breviss. per. parab. [9])

hi termini ex aequ°. pag. 2. [10])

$$2bcc \text{ ad } bbcc \text{ ut } \tfrac{3}{2}bb \text{ ad } \tfrac{3}{4}b^3 \quad \frac{\frac{3}{4}b^3}{\frac{1}{2}bbc} \,\Big|\, \frac{3b}{2c} \,\Big|\, \frac{p}{r} \;{}^{11})$$

---

[8]) Il s'agit de la règle publiée dans l'ouvrage: „Demonstratio regulae de maximis & minimis" (voir T. IX, p. 95, note 1) pour trouver le maximum ou le minimum d'une fraction. En effet, cette règle appliquée à la dernière expression pour AT amène immédiatement l'equation qui va suivre.

[9]) En effet, cette équation en $z = \text{GL}$ est plus simple que celle en $q = \text{GM}$ de la pièce N°. XX des „Travaux" de 1652 et 1653 (p. 84 du Tome présent). Consultez encore la note 5 de la même pièce N°. XX.

[10]) C'est-à-dire, l'équation de la note 4.

[11]) Pour arriver à la construction désirée à l'aide de la conchoïde donnée et du cercle, il suffirait d'identifier l'équation cubique en z avec celle en y de la note 4, privée du second membre, en posant $d^2 = a^2 - b^2 + c^2$. Or, cela est impossible, puisque le rapport du troisième au quatrième terme diffère dans les deux équations. On doit donc auparavant appliquer à l'équation en z la méthode enseignée par Descartes au Livre III de la „Géométrie" (p. 452 du T. VI de l'édition d'Adam et Tannery) pour „multiplier ou diuiser les racines sans les con-

$$z^3 - \tfrac{3}{2}bbz - \tfrac{1}{2}bbc$$
$$\frac{9bb}{4cc} \qquad \frac{27b^3}{8c^3}$$
$$y^3 - \frac{27b^4}{8cc}y - \frac{27b^5}{16cc}\text{ [12])} \;\Big|\; - \frac{bc^2}{a+b}y \text{ ex aequ. pag. 2 [10])}$$

$$\frac{27b^3}{8cc} \infty \frac{cc}{a+b}$$

$$27abbb + 27b^4 \infty 8c^4$$

$$a \infty \frac{8}{27}\frac{c^4}{bbb} - b$$

$$aa + cc - bb \infty d^2$$

noistre". De cette manière le rapport des deux derniers termes doit être changé dans la raison de $\frac{3}{4}b^3$ à $\frac{1}{2}bbc$, ou de $3b$ à $2c$; ce que Huygens achève par l'algorithme même donné par Descartes au lieu cité.

Ajoutons que sur une feuille détachée, datée du „28 Jul. 1659" (voir la note 1, p. 225 du Tome présent), Huygens a exposé la méthode qu'il a appliquée ici; on y lit:

„$x^3 - bxx + aax - c^3 \infty 0$ Aequatio data. Volo autem habere aliam similem, cujus radix ad radicem hujus habeat rationem cognitam in qua quantitas 3ij termini sit ad quantitatem 4ti termini in data ratione d ad ee."

A cet effet, appliquant l'algorithme de Descartes, il écrit l'équation désirée: $y^3 - \frac{bryy}{p} + \frac{aarry}{pp} - \frac{c^3r^3}{p^3}$; puis il calcule $\frac{r}{p}$ à l'aide de la proportion $\frac{aarr}{pp} : \frac{c^3r^3}{p^3} = d:ee$ et il fait suivre:

„Ergo loco aequationis prioris $x^3 - bxx + aax - c^3$ ponenda est alia cujus radix $y \infty \frac{rx}{p}$ hoc est $\frac{aaec}{dc^3}x$. Obtinebitur autem talis aequatio si multiplicemus hoc modo.

$$x^3 - bxx + aax - c^3$$
$$1. \quad \frac{aaec}{dc^3}. \quad \frac{a^4e^4}{ddc^6} \quad \frac{a^6e^6}{d^3c^9}$$
$$y^3 - \frac{aaecbyy}{dc^3} + \frac{a^6e^4y}{ddc^6} - \frac{a^6e^6c^3}{d^3c^9}$$

hi jam duo posteriores sunt inter se ut d ad ee ut facile apparet".

Après quoi il ajoute:

In constructionibus solidorum problematum magni usus.

[12]) L'équation en y, obtenue par le procédé que nous venons d'indiquer, peut être identifiée maintenant à celle de la note 4. A cet effet Huygens égale les coëfficients des termes en y; l'égalisation des termes constants aurait d'ailleurs amené nécessairement la même relation $\frac{27b^3}{8cc} = \frac{cc}{a+b}$.

Constructio ad inveniendum radicem y [13]). Ut autem p ad r sive ut $3b$ ad $2c$ ita y ad z [14]). $\frac{pz}{r} \infty y$; $z \infty \frac{ry}{p}$.

$\frac{8}{27}\frac{c^4}{b^3}$ est dimidiam quintae prop.^{lis} duarum $3b$ et $2c$, vel quinta prop. duarum $\frac{3}{2}b$ et c.

$$\text{necesse est } 8c^4 \,\Big|\Big|\, ^{15)}\; 27b^4$$

$$\frac{8}{27}\frac{c^4}{bbb} - b \,\Big|\Big|\, \frac{bb}{2c} \text{ vid. pag. 4 in fin. } ^{16)}$$

[13]) En effet, pour trouver y, on n'a plus qu'à construire a et d d'après les formules du texte; à prendre ensuite (voir la figure 1) AE $= a$, à construire le cercle qui a E pour centre et d pour rayon et enfin à abaisser du point d'intersection F avec la conchoïde la perpendiculaire FC. Alors AC $= y$.

[14]) Comparez la note 11. Il est clair qu'après cela la construction est facile à achever. On en trouve un résumé aux p. 200—201 du T. IX. Après avoir construit $y =$ AC (fig. 1), comme nous l'avons dit dans la note 13, on n'a qu'à prendre GL (fig. 2) égal à $z = \frac{2cy}{3b}$, ou bien GC à $(z + c)$. Dans ce dernier cas on a encore à déterminer l'intersection de la conchoïde donnée avec un cercle ayant G pour centre et GC pour rayon. C'est la voie suivie dans le résumé mentionné qui fut envoyé le 27 août 1687 à Mr. H. Coets.

[15]) Signe pour indiquer que $8c^4$ est plus grand que $27b^4$. Dans le cas contraire on obtiendra pour $a =$ AE (fig. 1) une valeur négative; ce qui en vérité n'importe guère. Plus tard Huygens a ajouté à ce propos: „videndum cum centrum E circuli est ex altera parte A, qualis tunc futura sit haec aequatio. 1680" Il s'agit de l'équation de la note 4.

[16]) Voici ce qu'on trouve au lieu cité: „bona est constr. cum d radius potest secare conchoidem, hoc est cum $d + a$ major quam c.

$$\sqrt{aa + cc - bb} + a \,\Big|\Big|\, c$$

$$aa + cc - bb \,\Big|\Big|\, cc - 2ac + aa$$

$$a \,\Big|\Big|\, \frac{bb}{2c}\text{"}$$

Cette condition est donc bien plus importante que la précédente, puisqu'elle décide sur la réalité du point d'intersection F (fig. 1). Au cas où $a > c$, la condition $a + d > c$ est remplacée par $a - d < c$; mais les deux conditions peuvent être exprimées ensemble par $(a - c)^2 < d^2$, ce qui mène à la relation $c^5 - \frac{27}{8}cb^4 - \frac{27}{16}b^5 > 0$, ou bien, posant $b = kc$, $16 - 27\,k^4\,(k + 2) > 0$, ce qui exige $k < 0,685\ldots$

On voit dès l'abord que cette condition est suffisante et on reconnaît facilement qu'elle

$$\frac{8}{27}c^4 - b^4 \,\Big|\Big|\, \frac{b^5}{2c}$$

$$8c^4 - 27b^4 \,\Big|\Big|\, \frac{27}{2}\frac{b^5}{c}$$

$$16c^5 - 54cb^4 - 27b^5 \infty 0$$

determ°. $c^5 - \frac{27}{8}cb^4 - \frac{27}{16}b^5 \infty 0$ [17])

bona eſt conſtr°. cum b ad c ut 2 ad 3, non autem cum ut 20 ad 29 [18]).

est de même nécessaire, en remarquant que la relation $c^5 - \frac{27}{8}cb^4 - \frac{27}{16}b^5 > 0$ exprime que la seule racine positive de l'équation $y^3 - \frac{27b^4}{8c^2}y - \frac{27b^5}{16c^2} = 0$ est inférieure à c; voir encore la note 4, p. 202 du T. IX, où la même relation est déduite de cette manière.

[17]) Lisez plutôt: $c^5 - \frac{27}{8}cb^4 - \frac{27}{16}b^5 > 0$.

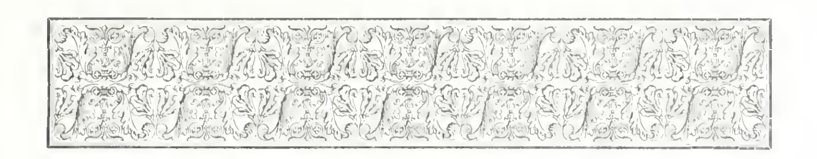
[18]) Au premier cas $k = \frac{2}{3} = 0{,}666\ldots < 0{,}685\ldots$; au second $k = \frac{20}{29} = 0{,}689\ldots > 0{,}685\ldots$

AD

C. V. FRAN. XAVER. AINSCOM, S. I.

EPISTOLA.

1656.



Avertissement.

En composant son „Ἐξέτασις Cyclometriae Cl. Viri Gregorii à S. Vincentio" ¹), Huygens avait espéré de pouvoir, par la lucidité de son exposition et la force de ses arguments, convaincre Grégoire lui-même de l'insuffisance de sa quadrature du cercle ²).

Après la publication, en décembre 1651, il fut bientôt désappointé par l'attitude évasive de Grégoire, qui, nonobstant les instances de plus et plus pressantes de Huygens, persista à réserver son jugement jusqu'au jour où il répondrait à tous ses adversaires à la fois ³). Un moment alors Huygens se trouva sur le point de perdre patience. Ce fut lorsque dans le brouillon d'une de ses lettres à Grégoire il lui adressa, entre autres, l'allocution célèbre de Cicéron „Quousque tandem abuteris patientia nostra!" ⁴). Mais il se reprend et se contente dans la lettre qu'il

¹) Voir l'ouvrage reproduit aux pages 315—337 du Tome XI.

²) Consultez le T. I aux pages 160 „Magna me spes tenet et tractandi ratione et argumentorum efficacia plenissimé tibi satisfactum fore", 161 „Sin otium non fuit nec adhuc suppetet, intelliges tamen imposterum et ex aliorum sententiis, et ex adversarij propria ut spero confessione nihil me frustra hic movisse" et 166 „Breviter modo hanc confutationem institui, et praecipue in hoc operam dedi ut ipsi Patri Gregorio in veriorem sententiam transeundi necessitatem imponerem".

³) Voir les lettres de Huygens du 26 décembre 1651, du 24 janvier et du 15 mars 1652, pp. 159, 171 et 174 du Tome I, et les réponses de Grégoire du 6 janvier, du 18 février 1652 (placée par mégarde parmi l'année 1651) et du 6 avril 1652, pp. 164, 137 et 179 du Tome I.

⁴) Voir le premier alinéa de la pièce N°. 122, p. 174—175 du T. I.

écrit de prier Grégoire emphatiquement de vouloir du moins lui indiquer en trois mots „combien de fois le rapport 53 à 203 contient le rapport 5 à 11 dans le fens de fa 44ième Propofition du Livre 10" [5]).

C'eft en effet de la réponfe à donner à cette queftion que dépend la réduction à l'abfurde qui conftitue la partie principale de l'„Ἐξέτασις"[6]). Une réponfe numérique aurait permis de calculer, en admettant la jufteffe de la quadrature de Grégoire, la valeur du rapport de la circonférence du cercle au diamètre et d'en démontrer la difcordance avec la valeur approchée bien connue de ce rapport. Au lieu de cela Grégoire renvoie [7]) à un ouvrage d'un de fes élèves, le père de Sarafa [8]), d'où il fuit, en effet, que le fens que Grégoire veut donner à l'expreffion „contenir" fe trouve être celui même que nous avons fuggéré dans la note 28 de la page 280 du Tome XI et d'après lequel le nombre de fois que le premier rapport „contient" le fecond eft exprimé par la valeur de n dans l'équation $\frac{53}{203} = \left(\frac{5}{11}\right)^n$. La réponfe ne manquait donc pas de précifion comme on ferait tenté de le croire au premier abord; mais elle impliquait que, même en admettant la jufteffe de toutes les propofitions qui avaient amené la première de fes quadratures prétendues, Grégoire n'avait pas donné la quadrature proprement dite du cercle mais feulement la réduction de cette quadrature à celle de l'hyperbole ou aux logarithmes.

Trois mois plus tard, en juillet 1652, Huygens avait à Gand un entretien amical avec Grégoire qui lui laiffa entendre que fon livre avait été rédigé par fes élèves, qu'il fe pourrait bien qu'une erreur fe fût gliffée dans la première quadrature, la feule attaquée directement par Huygens; mais qu'il avait confiance dans les autres. En quittant Grégoire, Huygens était fous l'impreffion que la réponfe tarderait encore longtemps à paraître et qu'elle ne vaudrait pas grand' chofe [9]).

Toutefois, déjà en janvier 1653 Huygens apprit [10]) qu' une réfutation de fon „Ἐξέτασις" était prête, compofée par un des élèves de Grégoire, le père Aynfcom. Elle ne parut qu'en 1656 [11]). En attendant, Kinner à Löwenthurn, un

5) Voir la p. 175 du T. I.
6) Comparez la p. 327 du T. XI.
7) Voir la p. 180 du T. I.
8) L'ouvrage cité dans la note 7 de la p. 156 du T. I.
9) Voir, sur cette entrevue, la lettre de Huygens à Tacquet du 4 novembre 1652, p. 189 du T. I.
10) Voir sa lettre à van Schooten du 17 janvier 1653, p. 219 du T. I.
11) Sur la caufe du retard on peut consulter une lettre de Grégoire à Huygens du 15 janvier 1654, p. 266 du T. I.

autre élève, prit la défenſe de ſon ancien maître. Dans ſes lettres à Huygens du 30 novembre 1652 et du 18 juillet de l'année ſuivante [12]) il conteſta que la première quadrature de Grégoire fût celle à laquelle l'auteur avait donné la préférence ſur les autres, comme Huygens l'avait prétendu [13]). Tout au contraire il conſidérait qu' avec elle l'auteur avait plutôt voulu montrer la poſſibilité de la quadrature du cercle que de l'expoſer de fait. C'était la ſeconde quadrature qui, d'après l'opinion de Grégoire lui-même, était la plus facile. Lui, Kinner, l'avait rédigée en 35 propoſitions qu'il publierait peut-être bientôt; ce qu' il fit en effet dans ſon ouvrage „Elucidatio geometrica Problematis Auſtriaci ſive Quadratura Circuli feliciter tandem detectae per R. P. Gregorium a S. Vincentio" [14]).

Auſſitôt après la réception de cette „Elucidatio" Huygens chercha à détromper Kinner en lui indiquant le lieu précis où il avait trouvé ſa quadrature en défaut [15]); mais il ne réuſſit pas à le convaincre [16]).

---

[12]) Voir les pp. 193 et 235 du T. I.

[13]) Voir la première page de l'„'Εξέτασις", p. 315 du T. XI.

[14]) Voir, pour le titre complet, la note 3 de la p. 252 du T. I.

[15]) Voir la lettre N°. 184 du 23 mars 1654, p. 278 du T. I.

[16]) Voir la lettre N°. 188 du 11 avril 1654, p. 282 du T. I. L'ouvrage de Kinner à Löwenthurn est très rare. Un exemplaire se trouve dans la bibliothèque de l'Université à Prague. Par la bienveillance de la direction nous l'avons pu avoir à Amsterdam et constater la portée de l'erreur commise par Kinner, à l'exemple de Grégoire.

Soient, en effet,

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = a_3 : b_3 = \ldots\ldots = a_n : b_n,$$

et de plus:

$$a_1 : c_1 = b_1 : d_1;\ a_2 : c_2 = b_2 : d_2;\ a_3 : c_3 = b_3 : d_3; \ldots\ a_n : c_n = b_n : d_n;$$

on aura alors:

$$\Sigma a : \Sigma c = \Sigma b : \Sigma d.$$

Ce théorème est démontré par Archimède; il constitue la Prop. 2 de l'ouvrage „De Conoidibus et Sphaeroidibus", p. 29 de l'édition de Commandin (Heiberg, T. I, p. 291, où elle porte le numero 1). Grégoire et Kinner font remarquer qu'elle reste valable si les grandeurs a, b, c, d sont remplacées par des rapports; ce qui est vrai.

Des relations:

$$\frac{p_1}{q_1} : \frac{r_1}{s_1} = \frac{p_2}{q_2} : \frac{r_2}{s_2} = \frac{p_3}{q_3} : \frac{r_3}{s_3} = \ldots\ldots = \frac{p_n}{q_n} : \frac{r_n}{s_n}$$

combinées avec:

$$\frac{p_1}{q_1} : \frac{t_1}{u_1} = \frac{r_1}{s_1} : \frac{v_1}{w_1};\ \frac{p_2}{q_2} : \frac{t_2}{u_2} = \frac{r_2}{s_2} : \frac{v_2}{w_2}; \ldots ; \frac{p_n}{q_n} : \frac{t_n}{u_n} = \frac{r_n}{s_n} : \frac{v_n}{w_n},$$

on peut donc conclure légitimement qu'on aura:

$$\Sigma \frac{p}{q} : \Sigma \frac{t}{u} = \Sigma \frac{r}{s} : \Sigma \frac{v}{w};$$

mais dans l'application qui suit, le *Hoc est* signalé par Huygens dans la lettre N°. 184 (p. 278 du T. I), cette relation est traitée comme si elle était:

Après ce premier paſſe d'armes avec un des élèves de Grégoire, Huygens avait encore à attendre plus de deux années avant qu'il reçut, en juillet 1656, la réponſe du père Aynſcom [17]), annoncée depuis ſi longtemps. Dans cet ouvrage de 182 pages in folio, l'auteur s'efforce à réfuter tous les adverſaires des quadratures de Grégoire. Il les diviſe en deux claſſes: ceux qui ont attaqué les théorèmes ſur les proportionnalités et ceux qui, laiſſant de côté ces théorèmes ou admettant leur juſteſſe, ſe ſont occupés des propoſitions dont les quadratures dépendent plus directement. Après avoir rendu hommage dans ſa préface aux adverſaires, parmi leſquels il donne au jeune Huygens la première place, qui ſe ſont ſervis de méthodes dignes de géomètres, quoiqu' ils n'aient pas atteint leur but [18]), il répond à ceux de la première claſſe par ſon „Liber primus", qui occupe les 88 premières pages de ſon ouvrage. Puis le ſecond livre débute, dans ſa „Pars prima," par un résumé de la première quadrature de Grégoire avec des explications authentiques ſuivant les intentions de ſon auteur [19]); tandis que la „Pars ſecunda" prend à tâche de réfuter l'un après l'autre tous les adverſaires de la „ſeconde claſſe" par autant de „Reſponſiones" [20]), deſquelles nous reproduiſons

---

$$\frac{\Sigma p}{\Sigma q} : \frac{\Sigma t}{\Sigma u} = \frac{\Sigma r}{\Sigma s} : \frac{\Sigma v}{\Sigma w}.$$

Si nous ajoutons que les Σp, Σq, etc. représentent des cubatures de divers corps, générés par l'opération „ducere planum in planum", décrite p. 278 du T. XI, et que quelques unes de ces cubatures dépendent de la quadrature du cercle, on comprendra comment cette application erronée de la proposition citée d'Archimède a pu mener à une fausse quadrature du cercle.

Ces remarques suffiront pour élucider les lettres citées, échangées entre Huygens et Kinner. Comme il l'avait déjà annoncé dans sa lettre du 23 mars 1654 (voir la page 279 du T. I), Huygens, tout en poursuivant sa correspondance amicale avec Kinner, n'a pas répliqué aux objections futiles contre sa critique, contenues dans la lettre de Kinner du 11 avril 1654, p. 283 du T. I.

[17]) Voir l'ouvrage cité dans la note 6, p. 210 du T. I.

[18]) „Qua in re, solidius reliquis, versati sunt, Clariss. Dominus Christianus Hugenius, Eruditissimique viri, Adrianus Auzotius, Alexius Syluius, & R. P. Vincentius Leotaudus S. I. Geometra egregius: qui licet spe suâ falsi, & scopum quem spectabant vnicè, minime attigere, vt sequentes edocebunt libri, eà certe in re geometrica versati sunt methodo, quae Geometras decet. vnde illorum conatus Auctori non solum non displicuit, vt multum se debere illis fateatur perlubenter: ego certè, totum huius operis argumentum, iisdem debere me, nunquam diffitebor: in quo, quid potissimum spectarim, quid à me factum sit, paucis accipe."

[19]) Voir les pages 89—104 de l'ouvrage cité.

[20]) Voir les pages 104—131 de l'ouvrage d'Aynscom. En effet, les adversaires de Grégoire se sont bornés presqu' exclusivement à attaquer sa première quadrature; soit que, comme Huygens, ils l'aient considérée comme préférée par l'auteur aux autres, soit qu' ils n'aient pas eu le courage de pénétrer plus avant.

plus loin [21]) la „Refponfio III ad 'Ἐξέτασιν Clariff. D. Chriftiani Hugenij". Enfin Aynfcom conclut par un troifième, quatrième et cinquième Livre qui contiennent des expofés des trois autres quadratures de Grégoire.

Inutile de dire que le père Aynfcom ne réuffit pas à fauver ni la première quadrature, ni les autres; toutefois une chofe reffort très nettement de fon expofition. Nous voulons parler de l'emploi, par Grégoire, du terme „contenir" dans la „Demonftratio" de fa 44e propofition du „Lib. 10", propofition dont dépend fa première quadrature. Quel eft le fens de ce terme dans la phrafe „qu'un rapport donné en contient un autre un certain nombre de fois"? Huygens, dans fon „'Ἐξέτασις" [22]), examine fucceffivement deux interprétations diverfes. Il en rejette la première, celle que nous venons d'expofer plus haut, en remarquant que le rapport 53 à 203 n'eft du rapport 5 à 11 ni le carré, ni la troifième puiffance ou quelque puissance plus élevée", enfuite il en hafarde avec beaucoup de réferve une autre qui amène la réduction à l'abfurde qu'il fait fuivre. Or, il n'y a aucun doute que cette première interprétation était celle, vifée par Grégoire [23]). La circonftance alléguée par Huygens que le nombre n qui doit fatisfaire à la relation $\frac{53}{203} = \left(\frac{5}{11}\right)^n$ eft néceffairement un nombre incommenfurable n'y fait pas obftacle, puifque la „Prop. 129" [24]) du „Lib. 6" de l'ouvrage de Grégoire, citée par

---

[21]) Voir les p. 249—261 du Tome présent.

[22]) Voir la p. 327 du T. XI.

[23]) Cela résulte entre autres de la „Prop. 34" du „Lib. 10" (p. 1117—1118) où la phrase en question est employée dans le sens bien déterminé que nous avons expliqué p. 279—280 du T. XI, au § 9.

[24]) Voici cette proposition qu'on trouve à la page 596 de l'ouvrage de Grégoire: „Sint AB, BC asymptoti hyperbolae DFH, & DE, FG, HC parallelae asymptoto: plano autem DEGF incommensurabile sit planum FGCH.

Dico rationem DE ad FG, toties multiplicare rationem FG, ad HC, quoties quantitas DEGF, continet quantitatem FGCH."

Or, écrivant $xy = k^2$ pour l'équation de l'hyperbole et posant DE $= a$, FG $= b$, HC $= c$, DEGF $=$ A, FGCH $=$ B, on a: A $= k^2 \log \frac{a}{b}$; B $= k^2 \log \frac{b}{c}$, donc $\frac{a}{b} = \left(\frac{b}{c}\right)^n$ où $n =$ A : B est en général un nombre incommensurable.

Il est vrai que le terme „continere" est employé ici et partout dans le sixième livre dans un autre sens que dans le dixième livre où se trouve la 44e proposition que nous venons de mentionner; mais on doit s'attendre dans l'ouvrage de Grégoire à ces sortes de surprises.

Aynſcom [25]), équivaut pleinement à l'introduction des expoſants incommenſurables. Toutefois elle change entièrement la portée de la prétendue quadrature, qui, comme nous l'avons déjà remarqué, ne donnerait autre choſe que la réduction de la quadrature du cercle à la détermination d'un nombre qui n'eſt exprimable qu' à l'aide des logarithmes [26]). Sous ce point de vue Huygens a raiſon de rejeter cette première interprétation comme ne menant pas à une quadrature proprement dite.

Dès que Huygens eut reçu l'ouvrage d'Aynſcom il prépara ſa réplique. Il l'annonce à De Roberval [27]) et à Wallis [28]) duquel il se propoſe de citer dans cette réplique l'opinion, conforme à la ſienne, exprimée par Wallis dans la préface de ſon „Arithmetica Infinitorum". Le 25 septembre il envoie le manuſcrit à l'imprimeur Elſevier [29]). Au commencement d'octobre 1656 l'impreſſion eſt achevée [30]).

Aynſcom, qui reçut un exemplaire par l'intermédiaire du père Seghers [31]), n'a jamais répondu, nonobſtant un rappel que Huygens lui fit parvenir en 1659 par le même père [32]).

Et il n'y a pas de doute que le terme „toties multiplicare" du livre 6 équivaut au „toties continere per multiplicationem", ou simplement „toties continere", du livre 10.

Ajoutons que de Sarasa, dans l'ouvrage mentionné plus haut, comme aussi Tacquet dans sa lettre à Huygens du 2 décembre 1652, p. 194—197 du T. I, ont compris de cette manière l'intention de Grégoire. Tous les deux, Sarasa à la p. 7 de son ouvrage, citent à ce propos cette même „Prop. 129". Et Wallis doit avoir exprimé la même opinion dans une lettre dont nous ne connaissons que la réponse de Huygens qui est du 13 juin 1653 (voir la p. 332 du T. I).

Consultez d'ailleurs sur les difficultés de l'interprétation des propositions de Grégoire la note 28, p. 257 du Tome présent.

[25]) En bas de la p. 100 de son ouvrage,

[26]) On aurait $\frac{53}{203} = \left(\frac{5}{11}\right)^n$ et $\frac{5}{11} = \left(\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{2\pi + 3\sqrt{3}}\right)^n$; donc $\log \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{2\pi + 3\sqrt{3}} = \left(\log \frac{5}{11}\right)^2 : \log \frac{53}{203}$. Nous laissons de côté l'explication par trop forcée donnée par Aynscom des intentions de Grégoire dans le „Scolium" de la „Prop. 40", sur lequel on pourra consulter la note 20, p. 254 du Tome présent. D'ailleurs cette explication ne mène à aucune construction ou calcul saisissable, et Huygens n'y a fait que justice dans les dernières pages de sa Lettre à Aynscom, p. 276—277 du Tome présent.

[27]) Voir la Lettre N°. 315, du 20 juillet 1656, p. 457 du T. I.

[28]) Voir la Lettre N°. 316, du 21 juillet 1656, à la p. 459 du T. I.

[29]) Toutefois l'ouvrage fut publié chez Vlacq; comparez les p. 490 et 491 du T. I.

[30]) Voir les lettres d'envoi à Seghers, van Schooten et van Gutschoven, pp. 502, 503 et 511 du T. I.

[31]) Voir la p. 502 du T. I.

[32]) Voir la p. 484 du T. II.

Ainſi la pouſſière ſoulevée par la quadrature du cercle de Grégoire St. Vincent, les attaques de Merſenne [33]), Sylvius [34]), Maybaum [35]), Léotaud [36]), Auzout [37]) et Huygens et les réponſes de de Sarafa, Kinner à Löwenthurn et Aynſcom, retombait enfin au repos, et toute cette polémique, qui a occupé le monde ſavant pendant plus de dix années, aurait laiſſé bien peu de traces, ne fût-ce que tout ce qui regarde un homme comme Huygens ne ceſſera jamais d'inſpirer un certain intérêt.

33) Voir l'ouvrage cité dans la note 5, p. 132 du T. I.
34) Voir l'ouvrage cité dans la note 1, p. 278 du T. I.
35) Voir l'ouvrage cité dans la note 5, p. 409 du T. I.
36) Voir les ouvrages cités dans la note 1, p. 266 et 267 du T. I.
37) Sous le pseudonyme A. A. dans l'ouvrage cité dans la note 4 p. 458 du T. I.

TROISIÈME RÉPONSE [1].

A L'ἘΞΈΤΑΣΙΣ DU TRÈS-SAVANT SEIGNEUR CHRÉTIEN HUYGENS [1].

1. Après avoir expliqué ce qui femblait appartenir à la première Quadrature [2]) je n'ai pas voulu, très-favant Seigneur, que cette mienne étude manquât à Vous, ou fût exigée par d'autres, auxquels le filence de l'auteur pût fembler une confeffion tacite d'erreur: et quoique, après ce qui a été dit par moi dans les pages précédentes, la réfutation de ce que vous écrivez longuement dans tout votre examen de la Cyclométrie foit facile, j'ai à deffein voulu la différer jufqu' ici afin de foumetre aux yeux de mes lecteurs, fans interruption, toute votre Ἐξέτασις et en même temps ma réponfe.

2. En premier lieu donc vous dites pag. 25 [3]): *Il (Grégoire de Saint Vincent) propofa quatre modes pour carrer le Cercle, et même en appliqua auffi à la quadrature de l'Hyperbole un, au fujet duquel, par plufieurs indices, on peut conclure qu'il fut eftimé par lui-même meilleur que les autres. Un de ces indices eft justement qu'il démontra par ce même mode deux quadratures de figures différentes, un autre que ce mode eft beaucoup plus évident que les trois autres et par cela même devrait paraître beaucoup moins fujet à erreur; puis encore jufqu' à certain point en ce qu' il le produifit en premier lieu; enfin le plus fort indice confifte en ceci que, dans ce qu' il dit dans la préface au lecteur laquelle précède l'ouvrage entier, là où il expofe brièvement l'hiftoire et le progrès de fon invention, il ne mentionne aucun mode en dehors de ce feul. Il eft vrai qu'il a pu avoir une autre raifon de paffer fous filence les trois quadratures fuivantes, nommément qu'il favait que des mêmes principes toutes les quatre étaient déduites et démontrées.*

Vous vous trompez, très favant Seigneur, et vos conjectures s'écartent auffi loin que poffible de la vérité; la feule et unique raifon de mettre en avant celle que l'Auteur appliqua en même temps au cercle et à l'hyperbole fut la propofition 50 [4])

---

[1]) La pièce est empruntée aux p. 120—124 de l'ouvrage d'Aynscom, cité dans la note 6, p. 210 du T. I. Pour faciliter les renvois, que nous aurons à faire, nous l'avons divisée en paragraphes.

RESPONSIO III [1]).

AD 'ΕΞΈΤΑΣΙΝ CLARISS. D. CHRISTIANI HUGENIJ.

1. Explanatis iis, quae ad primam quadraturam pertinere videbantur [2]), nolui ſtudium hoc meum, aut deeſſe Tibi Clariſſ. Domine, aut ab aliis requiri, quibus Auctoris ſilentium, tacita videri poſſet erroris confeſſio: & quamuis ex iis, quae in praecedentibus à me dicta ſunt, facilis ſit eorum refutatio, quae toto cyclometriae examine perſcribis, ſtudio tamen in hunc locum differre placuit, vt totam ſimul 'ἐξέτασιν tuam, vna cum reſponſo, non interruptim oculis obiicerem.

2. Primum igitur pag. 25 [3]). *quatuor*, inquis, *modos propoſuit* (*Auctor*) *quadrandi circulum; vnum vero eorum, etiam quadraturae hyperboles applicauit: quem caeteris potiorem ab ipſo exiſtimari, ex multis indiciis colligere licet; vnum eſt hoc ipſum, quod duas diuerſarum figurarum quadraturas, per eundem hunc demonſtrarit: alterum, quod euidentior hic ſit modus quam reliqui tres, ideoque minus errori obnoxius videri debuerit: & denique hoc maximum eſt, quod in iis quae ad lectorem in principio totius operis praefatur, vbi ſuae inuentionis hiſtoriam & progreſſum paucis expoſuit, nullius modi praeter hunc vnum meminerit; potuit & aliam rationem habuiſſe tres poſteriores quadraturas illic ſilentio praetereundi; eam videlicet, quod quatuor, omnes ſciret ex iisdem principiis deductas, & demonſtratas eſſe.*

Falleris Clariſſime Domine, & coniecturae illae tuae, quam longiſſimè à vero diſtant; ſola & vnica ratio praeponendi illam, quam circulo ſimul & hyperbolae applicuit Auctor fuit propoſitio 50 [4]). quae, cum cylindrum ad aliud corpus non

---

[2]) Il s'agit du résumé de la première quadrature de Grégoire, lequel occupe la „Pars prima" du „Lib. II", p. 89—104 de l'ouvrage d'Aynscom. Comparez la p. 244 de l'„Avertissement" qui précède ici.

[3]) Voir la p. 315 du T. XI.

[4]) Dans cette proposition et la suivante Grégoire démontre que le volume du cylindre droit ayant pour base la figure CDIH de la p. 278 du Tome XI et pour hauteur AB est égal au volume du solide qu'on obtient en soumettant à l'opération „ducere planum in planum" les aires GNIH, OPIH. Consultez, quant à la portée de ce théorème sur la première quadrature de Grégoire, les § 1—3 de l'„Aperçu" de cette quadrature, p. 277 du T. XI.

laquelle puifqu'elle réduit d'une manière admirable le cylindre à un corps non cylindrique et ainfi eft fondamentale à toutes les quadratures et ne pouvait être inférée parmi les autres fans troubler l'ordre, obligea de donner la première place à cette quadrature. De plus, c'eft une très grave erreur que toutes les quadratures ont été déduites et démontrées par les mêmes principes, car en dehors de la réduction du cylindre circulaire au folide produit par deux paraboles, placées à la renverfe l'une par rapport à l'autre [5]), la première quadrature n'a rien de commun avec les autres. Le raifonnement dans les deux cas et la comparaifon des folides et des rapports diffèrent du tout au tout; dans la première quadrature on ne fait aucun ufage des proportionnalités; les autres ne peuvent être effectuées fans leur moyen; dans la première l'argumentation eft conduite d'une manière nouvelle par la multiplication égale des rapports partiels [6]), dans les autres aucune mention n'eft faite de multiplication.

3. Vous continuez enfuite: [7]) *Mais il m'a femblé que l'une ou l'autre de ces confidérations fuffifait pour perfuader, qu'il y aurait une feule difcuffion valable pour toutes laquelle, détruifant la première quadrature, entraînerait les autres à fa fuite. Car fi nous avons montré qu'il y a erreur dans celle qui eft la moins obfcure, je ne vois pas pour quelle raifon un meilleur fuccès fe laifferait efpérer pour les trois fuivantes, qui fe trouvent enveloppées des plus grandes ténèbres et que l'Auteur lui-même femble mettre au-deffous de cette feule première.*

Une double erreur eft contenue dans ce peu de lignes; la première confifte en ce que vous eftimez qu'une feule difcuffion fuffit à toutes: or, comment une feule difcuffion pourrait-elle fuffire à toutes, lorfque les trois dernières n'ont rien de commun avec la première? A fuppofer que votre 'εξέτασις, ce qu'elle a fait moins que toute autre chofe, ait renverfé la première, certainement elle ne fe rapporte pas plus aux autres qu' à la dimenfion Archimédienne; fi vous voulez l'effayer, vous corrigerez fur-le-champ votre jugement. L'autre erreur réfide en ceci que vous croyez que la première quadrature a moins d'obfcurité tandis que les fuivantes font couvertes des plus denfes brouillards. Mais l'Auteur en juge tout autrement, moi, en les développant chacune pour foi, j'ai éprouvé toute autre chofe. La première a certainement plus de complications et d'obfcurité que les trois autres enfemble; dans ces dernières le raifonnement eft très-clair et la réduction des folides facile, dans la première la nouvelle manière de comparer au moyen des rapports partiels également multipliés eft compliquée, et la réduction des folides multiple, variée et très-difficile.

4. Pag. 26 [8]). *Cependant je ne puis laiffer de dire au moins ceci, que le très-favant auteur n'a pas appliqué avec affez de bonheur quelques inventions en matière de proportionnalités aux quadratures et que, dans mon opinion, c'eft là la caufe de fon erreur. C'eft ce que j'avais obfervé tout premièrement dans la propofition 39 du livre 10 &c.*

Ici, de nouveau, fe préfente une grave erreur: car ni dans 39, ni dans toute la

cylindricum, admirabili reducat modo, adeoque quadraturis omnibus esset fundamentalis, neque sine ordinis perturbatione, aliis inferi posset, primum huic quadraturae locum dedit. Porro quadraturas omnes ex iisdem principiis deductas, & demonstratas esse, error est longè grauissimus: nam praeter reductionem cylindri circularis, ad solidum ex ductu subalterno parabolarum ortum [5]), nil prima cum caeteris commune habet: ratiocinatio in vtrisque, & solidorum, rationumque comparatio, toto differunt caelo. in hâc, nullus proportionalitatum vsus; illae, absque earum ope perfici non possunt: in hac, per rationes partiales aequemultiplicatas [6]), nouo modo instituitur argumentatio, in illis, nulla multiplicationis mentio.

3. Pergis deinde [7]): *sed mihi vel alterutra harum considerationum sufficere visa est, vt persuaderet, vnam pro omnibus fore discussionem, quae quadraturam primariam infirmatura esset, reliquarum agmen ducentem: si enim erratum in ea ostenderimus, quae minus obscuritatis habet, non video quâ ratione melior successus expectandus sit in tribus sequentibus, quae maximâ caligine inuoluuntur, quasque auctor ipse vel vni illi posthabere videtur.*

Duplex hic in tam paucis lineis error interuenit; prior in hoc consistit; quod vnam omnibus sufficere discussionem existimes: quî enim discussio vna, sufficere possit omnibus, cum tribus reliquis nil cum prima sit commune? esto (quo nihil minus factum) primam euerterit ’εξέτασις tua, ad reliquas certè non magis illa, quam ad Archimedaeam pertinet dimensionem. experire si placet, & ilico iudicium ipse tuum corriges. alter in eo est, quod primam minus habere obscuritatis, sequentes autem maximâ inuolui putes caligine. at longè aliud de illis censet Auctor, aliud ego dum singulas explano, expertus sum. prima certè plus & tricarum & obscuritatis habet, quam reliquae simul omnes. in his & clarissima est ratiocinatio & reductio solidorum facilis; in illa nouus per rationes partiales aequemultiplicatas comparandi modus, intricatus est, & solidorum reductio multiplex, varia, ac perdifficilis.

4. Pag. 26 [8]). *vnum tamen praetermittere nequeo quin dicam, Clariss. virum non satis feliciter quaedam inuenta in materia proportionalitatum ad quadraturam applicasse; atque hinc meâ opinione ipsi exstitisse erroris causam. primum omnium id in propos. 39 lib. 10. obseruaueram &c.*

Grauis hic rursum occurrit error: neque enim in 39, neque in tota prima qua-

[5]) C'est-à-dire en appliquant l'opération „ducere planum in planum”, décrite au § 4, p. 278 du T. XI, à deux paraboles situées comme les paraboles ANZ et BPY de la figure de cette page 278.

[6]) Voir les §§ 7 et 9 à la p. 279 du T. XI en tenant compte de l'équivalence des termes „toties continere” et „toties multiplicare”, sur laquelle on peut consulter la note 24, p. 246 du Tome présent.

[7]) Voir les p. 315—317 du T. XI.

[8]) Voir la p. 317 du T. XI.

première quadrature il n'eſt fait uſage d'aucune proportionnalité, puiſque c'eſt toute autre choſe de comparer des rapports entre eux ſelon l'égale multiplication de leurs rapports, par leſquels ils ſont conſtitués ſelon la huitième propoſition du livre 10 [9]), que d'argumenter par proportionnalités: liſez la propoſition 39, expliquée ſelon l'intention de l'Auteur [10]) et comparez la avec la propoſition 3 du livre ſuivant [11]) dont la démonſtration eſt conduite par proportionnalités, et auſſitôt apparaîtra une différence énorme: et, en effet, comment l'Auteur a-t-il pu appliquer moins heureuſement à la Quadrature quelques inventions en matière de proportionnalités lors que ni dans la propoſ. 12 [12]) ou 39 [13]), ni dans 40 ou 44, ni dans 51 ou 52 ou 53, dans leſquelles toute la première quadrature eſt contenue, il ne cite ou n'emploie aucune propoſition empruntée au livre des proportionnalités [14]). Donc ce n'eſt pas de là qu' une cauſe d'erreur a pu exiſter pour l'auteur.

5. Pag. 27 [15]). *je ramènerai la queſtion à ceci que, à moins qu' il ne déclare impoſſible de conduire ſa quadrature à bonne fin et de trouver par elle réellement une figure rectiligne égale au cercle, je lui montrerai de quelle manière cela pourrait enſuite être obtenu très facilement. Après cela en ſuivant ſes propres pas je démontrerai, que, par la voie dans laquelle il nous a précédé juſqu' ici, on ne peut parvenir nullement à ce qu'il déſire.*

Sur la manière que vous promettez de donner par laquelle l'auteur pourrait dans la ſuite trouver très facilement une figure rectiligne égale au cercle nous verrons tantôt lorſque nous ſerons arrivés juſque-là. Qu'en ſuivant ſes pas on peut arriver au but propoſé ſera démontré dans ce livre-ci et dans les ſuivants [16]).

Ce qui ſuit juſqu' à la page 32 [17]) ne contient rien d'autre que quelques propotions de l'Auteur.

6. Pag. 32 [17]). *Cela poſé, il faut ſavoir que pour le ſavant auteur tout eſpoir et toute baſe de la quadrature à effectuer ſont fondées en ceci qu'il eſtime facile de trouver le rapport du ſolide HY [18]) au ſolide XV (lequel rapport j'ai déjà dit être la ſeule*

---

[9]) Comparez la note 8, p. 317 du T. XI où la même „Prop. 8" est citée. D'ailleurs nous la reproduirons plus loin dans la note 28, p. 257.

[10]) Consultez, sur cette proposition 39, le § 10 de la p. 280 du T. XI et la note 8, p. 317 du même Tome. Ici il s'agit de l'explication que Aynscom a donnée de cette proposition à la p. 97 du „Lib. II" de son ouvrage. D'après cette explication, pour autant qu'on peut la comprendre, Grégoire n'aurait voulu affirmer le „toties continere" que pour les rapports „constituants". Inutile de dire qu' alors elle perdrait tout l'intérêt que Grégoire y attache dans sa quadrature du cercle.

[11]) C'est-à-dire la „Prop. 3" du „Lib. III", p. 136 de l'ouvrage d'Aynscom (celui de Grégoire ne contient pas plus de dix livres), dans laquelle en effet, la conception du „toties continere" ne joue aucun rôle.

[12]) Voici cette „Prop. 12", p. 1105 de l'ouvrage de Grégoire: „Sint quatuor ordines quinque proportionalium A, B, C, D, E, & F, G, H, I, K: deinde L, M, N, O, P, & Q, R, S, T,

dratura, vllus proportionalitatum vſus. quippe longè aliud eſt, rationes inter ſe comparare, ſecundum aequemultiplicationem illarum rationum, ex quibus iuxta octauam eiuſdem lib. 10. conſtituuntur [9]), aliud per proportionalitates argumentari: lege propoſ. 39. iuxta Auctoris mentem explicatam [10]), illamque confer cum propoſ. 3. ſequentis libri [11]), cuius demonſtratio per proportionalitates inſtituitur; & ilico diſcrimen ingens apparebit: & vero quì Auctor potuit inuenta quaedam in materia proportionalitatum infelicius ad quadraturam applicaſſe, cum nec in propoſ. 12 [12]). aut 39 [13]). nec in 40 aut 44. nec in 51. aut. 52. aut 53. quibus tota prima continetur quadratura, vllam citet aut vllâ vtatur propoſitione ex libro de proportionalitatibus [14]) petitâ? non igitur inde exſtitiſſe Auctori potuit erroris cauſa.

5. Pag. 27 [15]). *eo rem deducam, vt ſi quidem non impoſſibile dicet quadraturam ſuam ad exitum perducere, & per eam reapſe inuenire rectilineum circulo aequale, oſtendam quì id facillimè impoſterum aſſequatur: deinde veſtigia ipſius inſiſtens demonſtrabo, quibus hactenus nobis praeceſſit, iis nequaquam ad optatum finem perueniri poſſe.*

De modo quem daturum te polliceris quo facillimè impoſterum Auctor rectilineum circulo inuenire poſſit aequale, mox videbo, vbi ad illum deuenero. porro veſtigia illius inſiſtendo ad optatum finem deueniri poſſe hic, & ſequentes edocebunt libri [16]).

Quae ſequuntur vſque ad pag. 32. [17]) nil aliud continent, praeter aliquot Auctoris propoſitiones.

6. Pag. 32 [17]). *his ſic conſtitutis, ſciendum eſt omnem ſpem & fundamentum perficiendae quadraturae, Clariſſ. viro in eo poſitum eſſe, quod exiſtimet rationem ſolidi HY* [18]) *ad ſolidum XV (quam vnicam tantum deſiderari iam monui) facilè*

V, habentium vltimas quantitates E, K, P, V aequales inter se. Dico rationem quantitatum AF ad LQ, toties continere rationem quantitatum CH ad NS, quoties ratio quantitatum CH ad NS, continet rationem quantitatum DI ad OT."

Remarquons que d'après les propositions qui précèdent, dont nous en citerons deux dans la note 28, p. 257, les notations AF, LQ, etc. désignent A + F, L + Q, etc. Le théorème est donc faux, si du moins on attache aux mots leur signification ordinaire. Consultez là-dessus la note 28 citée.

[13]) Cette proposition et les cinq autres qui suivent ont toutes été mentionnées aux p. 277—280 du T. XI.

[14]) Il s'agit du „Liber octavus. De Proportionalitatibus Geometricis", qui occupe les p. 865—954 de l'ouvrage de Grégoire.

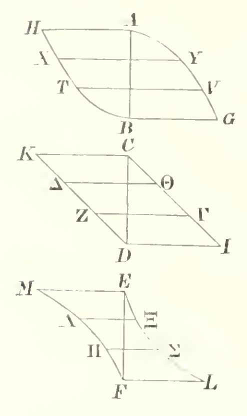
[15]) Voir la p. 319 du T. XI.

[16]) Il s'agit des „Lib. III, IV et V" de l'ouvrage d'Aynscom qui traitent les trois autres quadratures de Grégoire.

[17]) Voir la p. 325 du T. XI.

[18]) Voir la figure de la page 254.

chofe qui refte à défirer) dès que l'on connaît les deux rapports fuivants, favoir celui du folide ΜΞ au folide ΛΣ, et celui du folide ΚΘ au folide ΔΓ. Car alors on pourra argumenter comme il fuit. Connu eft le rapport du folide ΜΞ au folide ΛΣ, de même celui du folide ΚΘ au folide ΔΓ; donc eft connu auffi combien de fois le premier rapport contient le dernier, or, autant de fois que celui-là contient celui-ci, autant de fois ce dernier, c'eft-à-dire le rapport du folide ΚΘ au folide ΔΓ contient le rapport du folide ΗΥ à ΧV, donc auffi ce dernier rapport fera connu.



Ici vous vous écartez tout à fait du fens de l'auteur; car quoique le fondement de la quadrature à effectuer foit fitué en ceci que l'on faffe connaître le rapport du folide ΗΥ au folide ΧV, jamais l'auteur n'a eftimé qu'il fût facile à trouver lorfque font connus les rapports du folide ΜΞ au folide ΔΣ et du folide ΚΘ au folide ΔΓ; car il les avait déjà fait connaître auparavant par la propof. 43 [19]); d'où il fuit qu'il ne s'eft pas auffi fervi de l'argumentation que vous dites, mais de celle que j'ai produite dans le Scholium à la propofition 40 [20]) laquelle du tout au tout diffère de la vôtre; de plus, vouloir admettre comme généralement connu un troifième rapport lorfque de deux rapports connus le premier contient par multiplication le fecond autant de fois que celui-ci contient par multiplication le troifième eft la même chofe que de vouloir produire entre deux données un nombre quelconque de moyennes proportionnelles [21]): or, il ferait infenfé de confondre la quadrature avec le méfolabe ou de fuppofer celui-ci pour accomplir celle-là; l'auteur n'a donc pas efpéré rendre connu un troifième rapport au moyen de deux rapports connus dont le premier contient autant de fois le fecond, que ce fecond le troifième [22]).

7. Ibid. [23]) *Si donc je lui aurai indiqué quel eft le rapport du folide ΜΞ au folide ΛΣ, et auffi quel eft le rapport du folide ΚΘ au folide ΔΓ, et que même alors il ne puiffe dire quel est le rapport du folide ΗΥ au folide ΧV, il devra avouer qu'il a tenté en vain la quadrature tant du Cercle que de l'Hyperbole.*

[19]) Comparez le § 8, p. 279 du T. XI.

[20]) Voir, sur la „Prop. 40" du „Lib. 10", le § 10, p. 280 du T. XI. Aux p. 98—103 de son ouvrage Aynscom fait suivre cette proposition par une explication „iuxta auctoris mentem" et par un „Scholium" prolixe et diffus. Il y prétend que l'assertion de Grégoire: que le rapport des solides Μ*Ξ* et *ΛΣ* (voir la figure de la page présente) doit contenir autant de fois le rapport des solides Κ*Θ* et *ΔΓ* que celui-ci contient le rapport des solides ΗΥ et ΧV, ne s'applique pas aux rapports „totaux" des solides entiers, mais seulement aux rapports „partiels", qui constituent ces rapports totaux, c'est-à-dire, aux rapports des tranches infiniment petites, pour lesquels, en effet, l'assertion est vraie. Ensuite pour représenter ces rapports

inueniri posse, si cognitae sint duae rationes nimirum ratio solidi ΜΞ *ad sol.* ΛΣ *& ratio sol.* ΚΘ *ad sol* ΔΓ. *sic enim tunc argumentabitur: nota est ratio solidi* ΜΞ *ad sol.* ΛΣ, *item ratio solidi* ΚΘ *ad sol.* ΔΓ, *ergo notum quoque, quoties illa ratio hanc continet; quoties autem illa hanc continet, toties haec ipsa continet rationem solidi* ΗΥ *aa sol.* ΧΥ, *ergo & haec nota erit.*

Plane hic ab Auctoris mente deuias; licet enim fundamentum perficiendae quadraturae in ea positum sit, vt nota reddatur ratio solidi HY ad sol. XV, nunquam tamen existimauit Auctor illam facilè inueniri posse, si cognitae forent duae rationes, nimirum solidi ΜΞ ad sol. ΛΣ & sol. ΚΘ ad sol. ΔΓ; has enim antea notas fecerat propos. 43 [19]). vnde nec illam quam profers argumentationem instituet, sed eam, quam in scholio ad propos. 40. attuli [20]), quae toto caelo à tua differt: porro ex datis vel notis duabus rationibus, quarum prima toties per multiplicationem continet secundam, quoties haec per multiplicationem continet tertiam, velle tertiam vniuersaliter notam facere, idem est atque inter duas datas, quotcumque medias proportionales velle exhibere [21]): stultum autem foret quadraturam meselabio commiscere, aut hoc ad illam perficiendam supponere. non igitur ex duabus notis rationibus, quarum prima toties multiplicat secundam, quoties haec multiplicat tertiam, sperauit Auctor hanc notam reddere [22]).

7. Ibid. [23]) *si igitur indicauero ipsi, quae sit ratio solidi* ΜΞ *ad sol.* ΛΣ, *item quae sit solidi* ΚΘ *ad sol.* ΔΓ, *& ne tum quidem dicere possit, quam rationem habeat solidum* ΗΥ *ad sol.* ΧΥ, *fateatur sanè se frustra vtramque quadraturam tentasse, tum circuli tum hyperboles.*

---

partiels il a recours aux aires hyperboliques que nous avons mentionnées dans la note 24, p. 245 du Tome présent; mais il finit par commettre la faute même contre laquelle il avertit le lecteur au début, en appliquant à des sommes ce qu' il n'a démontré que pour leurs parties. De plus, il fait la supposition erronée que le rapport des aires hyperboliques DEGF et GFHC (voir la figure de la note 24 que nous venons de citer) sera rationnel quand il en est ainsi des rapports des longueurs DE, FG et HC. Et, nonobstant tout cela, il n'arrive à aucune conclusion bien définie, qui permettrait de déduire le troisième rapport des deux autres par la construction ou par le calcul.

[21]) Soient $a:b$, $c:d$, $e:f$ les trois rapports en question. Si alors on a $a:b=(c:d)^n$ et en même temps $c:d=(e:f)^n$, où n est un nombre commensurable, la détermination du rapport $e:f$ se réduit, en effet, au mésolabe, c'est-à-dire, à la construction d'un certain nombre de proportionnelles entre deux segments donnés, pourvu du moins qu'il soit possible de trouver le nombre n au moyen de la première relation, où les rapports $a:b$ et $c:d$ sont supposés connus.

Pour le montrer posons $e:f=g:d=(c:d)^{\lambda:\mu}$. On a alors $g=d^{\frac{\mu-\lambda}{\mu}}c^{\frac{\lambda}{\mu}}$; donc le segment g est la $\lambda^{\text{ième}}$ des $\mu-1$ proportionelles à interpoler entre d et c.

[22]) Ici la confusion, créée non sans intention, à ce qu' il nous semble, est à son comble. En vérité, si l'on nie que Grégoire ait voulu indiquer comment on pouvait déterminer le troisième rapport à l'aide des deux autres, alors sa première quadrature s'évanouit entièrement; puisqu' il ne donne aucun autre moyen pour parvenir à ce troisième rapport dont sa quadrature du cercle dépend.

[23]) Voir le quatrième alinéa de la p. 325 du T. XI.

Vous auriez pu, croyez moi, vous épargner ce labeur, car le rapport du folide ΜΞ au folide ΛΣ et de même du folide ΚΘ au folide ΔΓ lui était connu et il l'avait démontré tant à Rome qu'en Belgique à d'autres, plusieurs années avant que vous n'aviez vu le jour: lifez la propof. 43, livre 10, qui fait connaître les deux rapports; vous n'aviez donc nullement befoin de les indiquer à un Auteur, duquel même vous les aviez pris.

Si [24]), *au contraire, lorfque ces deux rapports font donnés, il aurait pu trouver enfuite celui du folide ΗΥ au folide ΧV, alors il peut croire avoir réellement carré le Cercle.*

C'eft ici cette manière de réduire très facilement le cercle à un carré, que vous avez promife à la page 27 [15]) de donner à l'Auteur. Je vous prie, très-favant Seigneur, d'où avez vous pris que la quadrature est effectuée lorfque le rapport du folide ΗΥ au folide XV eft connu? Certainement d'aucun autre que de l'Auteur et même fi vous le vouliez, vous ne pourriez le nier: mais comment alors l'enfeignez vous, comme s'il l'ignorait, à celui même duquel vous l'avez appris? Je voudrais qu'en écrivant de telles chofes vous vous fuffiez rappelé ce que et à qui vous écriviez.

Je dirai [25]) *maintenant quels font ces rapports. Quant au premier, favoir celui du folide ΜΞ au folide ΛΣ, je dis qu'il eft le même que celui des nombres* 53 *à* 203, *tandis que l'autre, le rapport du folide ΚΘ au folide ΔΓ eft celui de* 5 *à* 11 *et de ces deux rapports je donnerai plus loin la démonftration &c. Par conféquent, il lui incombera maintenant de définir combien de fois le premier rapport contient le fecond, c'est-à-dire combien de fois le rapport de* 53 *à* 203 *contient le rapport* 5 *à* 11. *Mais d'abord comment va-t-il expliquer ici le terme contenir? &c.*

Je n'ai aucune objection à ce que le rapport du folide ΜΞ au folide ΛΣ eft le même que celui des nombres 53 à 203 et l'autre du folide ΚΘ au folide ΔΓ celui de 5 à 11, pourvu que l'un et l'autre foient bien démontrés: mais combien de fois le premier rapport contient par multiplication le fecond fe trouve défini dans le fcholium de la propofition 40 d'après les feuls principes de l'Auteur: mais dans quel fens le mot *continere* doit être expliqué c'est ce qu' on peut voir dans le fcholium et les propofitions 39.40 précédemment expliquées, d'où il fuit que c'eft contre la vérité, ce qui eft prétendu à la page 37 [26]), que dans l'opus Geometricum il n'eft pas donné aucune autre explication du mot *continere* en dehors des deux produites par vous; et je m'étonne en vérité que cette interprétation n'a pas été aperçue par vous, parce qu'elle pouvait facilement être comprife de la propofition 12 [27]); laquelle repofe fur la huitième, furtout en y ajoutant l'explication du Père Sarafa au corollaire 9 [28]) des confirmations de la quadrature, livre qui n'a pas

[24]) Voir le cinquième alinéa de la p. 325 du T. XI.
[25]) Voir les p. 325 et 327 du T. XI, à commencer par l'avant-dernier alinéa de la p. 325.
[26]) Voir le deuxième alinéa de la p. 329 du T. XI.

Superſedere, mihi crede, labori iſti poteras; rationem enim ſolidi MΞ ad ſol. ΛΣ, item ſolidi KΘ ad ſol. ΔΓ, notam habuit, aliiſque & Romae & in Belgio demonſtrauit Auctor, pluribus annis antea, quam tu vita & luce fruereris: lege propoſ. 43. lib. 10. quae utramque rationem notam facit; nil igitur opus erat illam Auctori indicare, ex quo ſolo notitiam illius hauſiſti.

Sin [24]) *vero datis iſtis duabus rationibus, inuenire poſt hac potuerit rationem ſolidi HY ad ſol. XV, tum ſe credat circulum reuera quadraſſe.*

Hic ille modus eſt circulum facillimè ad quadrum reducendi, quem pag. 27. [15]) daturum te auctori pollicitus es: Quaeſo te Clariſſ. Domine, vnde habes, notâ ratione ſolidi HY ad ſol. XV, quadraturam abſolui? non aliundè certè quam ex Auctore, neque id, ſi velis, diſſiteri potes: vt quid igitur, acſi hunc ignoraret is à quo ſolo didiciſti, quadraturae modum preſcribis? cum illa ſcriberes, optaſſem meminiſſe te, quid, & cui ſcriberes.

Dicam [25]) *autem nunc ipſas rationes: & primam quidem, hoc eſt rationem ſolidi MΞ ad ſol. ΛΣ, aio eſſe eandem quae numeri* 53 *ad* 203. *alteram vero rationem ſolidi KΘ ad ſol.* ΔΓ, *eam quae* 5 *ad* 11. *atque horum vtrumque infra ſum demonſtratus &c. conſequenter hoc nunc definiendum ei incumbet, quoties ratio harum prima, contineat ſecundam, hoc eſt quoties ratio* 53 *ad* 203, *contineat rationem* 5 *ad* 11. *ſed enim quo ſenſu verbum continere hic explicaturus eſt?* &c.

Rationem ſolidi MΞ ad ſol. ΛΣ eandem eſſe quae numeri 53. ad 203. & alteram ſolidi KΘ ad ſol. ΔΓ, eam quae 5. ad 11. nil habeo quod opponam, cum vtrumque rectè demonſtratum ſit: quoties autem ratio prima per multiplicationem contineat ſecundam, definitum eſt in ſcol. ad propoſ. 40. ex ſolis Auctoris principiis: quo autem ſenſu verbum *continere* explicaturus ſit, vide idem ſcholium & propoſ. 39. 40. ante explicatas. vnde à vero alienum eſt, quod pag. 37. aſſeritur [26]), aliam interpretationem verbi *continere*, praeter duas à Te allatas, nullam in oper. Geom. exhiberi. & vero miror, interpretationem illam à Te perceptam non eſſe, cum ex prop. 12. [27]) quae octauae innititur, facile intelligi potuerit, additâ praeſertim explicatione P. Saraſſae coroll. 9. [28]) confirmationum quadraturae, qui liber deeſſe

[27]) Voir la note 12; puisque la proposition est erronée, il était difficile d'en déduire le sens véritable du terme „continere".

[28]) Dans le corollaire en question (p. 32 de son ouvrage) de Sarasa s'efforce de sauver la „Prop. 12" mentionnée en expliquant les étranges sous-entendus qu'on doit supposer pour comprendre la portée des propositions de Grégoire. En effet, ces sous-entendus sont bien propres à déconcerter celui qui consulte l'ouvrage de Grégoire. Ainsi l'addition des rapports représente chez lui deux opérations différentes qu'il discute amplement dans le „Scholion" à la „Prop. 6" du „Lib. 10" (p. 1102—1103 de son ouvrage). De cette façon il lui arrive de formuler des propositions étonnantes telle que la „Prop. 8", p. 1104 du même „Lib. 10", que nous citons, avec sa démonstration, comme échantillon. Disons d'abord que A, B, C, D sont des segments de droites de longueurs arbitraires et que AB signifie la somme des segments A et B.

Voici donc cette proposition: „Sint iam rationes AB ad CD, termini tam antecedens quàm

pu vous manquer, vu un ſi grand voiſinage des lieux et qu' il a paru deux années avant le vôtre [29]).

8. Pag. 37 [30]). *il n'a donc pas enſeigné la manière de déterminer combien de fois le rapport du ſolide MΞ au ſolide ΛΣ contienne le rapport du ſolide KΘ au ſolide ΔΓ et par conſéquent ne pourrait pas non plus déterminer combien de fois ce rapport contient le rapport du ſolide HΥ au ſolide XV. D'où il paraît que ce rapport, même alors que les deux premiers ſont donnés, ne peut être connu au moyen de ce que le très-ſavant auteur a trouvé, et que par conſéquent il a eſpéré en vain de pouvoir effectuer de cette manière la quadrature du cercle.*

Ici eſt commiſe une erreur capitale, qui montre auſſi que vous n'entendez pas la doctrine de l'auteur, car ſoit que vous preniez le mot *continere* dans le ſens voulu par l'auteur et par moi précédemment expliqué, ſoit que vous y voyiez un *continere par multiplication* il a abondamment enſeigné les deux modes de détermination comme il eſt démontré dans le ſcholium de la propoſition 40. du livre 10 de l'opus Geometricum [31]), d'où ce troiſième rapport pouvait devenir connu par les inventions de l'auteur, de ſorte qu'il n'a pas eſpéré en vain d'effectuer par cette voie la quadrature du cercle.

Il [32]) *ne me reſte maintenant que de rendre manifeſte ce que j'ai poſé dans ce qui précède, en diſant que je démontrerais que le ſolide MΞ eſt au ſolide ΛΣ comme* 53 *à* 203, *et de même que le ſolide KΘ aurait au ſolide ΔΓ le même rapport que* 5 *à* 11. *Mais comme pour démontrer le premier il eſt néceſſaire que nous ſachions quel eſt le rapport de l'onglet parabolique à ſon cylindre de même baſe et de même hauteur; à cet effet faiſant connaître ce rapport, nous allons augmenter le traité que le très-Savant Auteur donne ſur cet onglet, dans la partie* 5 *du livre* 9, *d'un Théorème excellent, lequel je m'étonne que l'Auteur n'a pas trouvé lui-même parce qu'il ſe déduit facilement des choſes qu'il avait déjà démontrées, ainſi qu'il paraîtra bientôt.*

Vous vous trompez, très-Savant Seigneur, l'Auteur a vu et inventé ce Théorème il y a déjà trente ans et plus, mais comme celui-ci pouvait à tel point ſans peine aucune ſe déduire de ce qu'il avait démontré, il ne l'a jugé digne que d'un corollaire et non pas d'une propoſition. Voyez le corollaire [33]) de la propoſition 99 du livre 9 de l'opus Geometricum où vous liſez ces mots: *De là eſt manifeſte*

---

consequens diuisi, & antecedens quidem in A & B, consequens verò in C & D. Dico rationem AB ad CD, eandem esse cum ratione A ad C, B ad C, item A ad D, B ad D.

Demonstratio. Ratio A ad C, addita rationi B ad C, aequalis est rationi AB ad C (per 114 de proport.). Item ratio A ad D, addita rationi B ad D, aequalis est rationi AB ad D. Itaque cùm ratio AB ad C, vnà cum ratione AB ad D, aequalis sit rationi AB ad CD per praec. patet rationem AB ad CD, aequari rationibus A ad C, B ad C, vnà cum rationibus A ad D, & B ad D".

Quant à la proposition précédente, sur laquelle la démonstration s'appuie, elle est comme il suit:

Tibi non poterat, in tanta locorum vicinitate, cum duobus annis ante tuum prodierit [29]).

8. Pag. 37. [30]) *non docuit igitur modum determinandi, quoties ratio ſolidi ΜΞ ad ſol. ΛΣ, contineat rationem ſol. ΚΘ ad ſol. ΔΓ, ac proinde nec determinari poterit, quoties haec ratio contineat rationem ſolidi ΗΥ ad ſolidum ΧΥ: quare liquet hanc rationem ne duabus quidem prioribus datis, per inuenta Clariſſ. viri cognoſci poſſe, adeoque fruſtra ipſum ſperaſſe hoc modo perficere circuli quadraturam.*

Hic error commiſſus eſt palmaris, qui etiam in Auctoris doctrina peregrinum Te oſtendit: ſiue enim verbum *continere* ſumas in ſenſu ab Auctore intento & ante à me explicato, ſiue per illud intelligas *continentiam per multiplicationem*, vtrumque determinandi modum, abunde docuit vt oſtenſum in ſchol. ad propoſ. 40. lib. 10. oper. Geom. [31]) vnde tertia illa ratio per inuenta Auctoris nota fieri potuit, adeoque non fruſtra hâc viâ ſperauit circuli quadraturam perficere.

Reſtat [32]) *nunc tantum vt manifeſta faciam, quae in praecedentibus poſita fuere. dixi enim me demonſtraturum, quod ſolidum ΜΞ eſſet ad ſol. ΛΣ, vt* 53 *ad* 203, *item quod ſolidum ΚΘ, rationem haberet ad ſolidum ΔΓ, quam* 5 *ad* 11. *quoniam autem ad horum primi demonſtrationem neceſſarium eſt, vt notum habeamus, quae ſit ratio vngulae parabolicae ad cylindrum ſuum, idcirco hanc rationem declarantes, tractatum Clar. viri quem de eadem vngula propoſuit, vno egregio Theoremate auctiorem reddemus; quod miror ipſum non inueniſſe, cum ex iis quae iam oſtenderat facili negotio deducatur.*

Falleris Clariſſ. Domine, Theorema illud & vidit & inuenit Auctor iam à triginta & quod excedit, annis: ſed quia tam nullo negotio ex iis quae demonſtrarat deduci poterat, corollario illud, non propoſitione dignatus eſt. Inſpice corollarium [33]) propoſ. 99. lib. 9. oper. Geom. in quo haec verba leges: *Hinc manifeſta eſt ratio dignoſcendi proportionem inter vngulam parabolicam & cylindrum, qui*

„Propositio VII. Sit rationis A ad BC consequens divisum in B & C. Dico rationem A ad totam BC, eandem esse cum ratione A ad B, & A ad C".

[29]) L'ouvrage de Sarasa, cité p. 156, note 7 du T. I, parut à Anvers en 1649; il porte en haut des pages la suscription „Confirmationes quadraturae".

[30]) Voir le second alinéa de la p. 329 du T. XI.

[31]) Il s'agit toujours du „Scholium", ajouté par Aynscom a la „Prop. 40" du „Lib. 10", laquelle dans l'ouvrage de Grégoire n'est pas pourvu d'un „Scolium". Consultez la note 20, p. 254 du Tome présent.

[32]) Voir la p. 329 du T. XI à commencer par le troisième alinéa.

[33]) Voici le „Corollarium" en question qu'on trouve à la p. 1034 de l'ouvrage de Grégoire: „Hinc manifesta est ratio dignoscendi proportionem inter vngulam parabolicam, & cylindrum parabolicum qui vngulam continet, vel inter vngulam & residuum quod cum vngula parabolica cylindrum perficit. ex libro etenim quem praemisimus de parabola methodus colligi potest reducendi cylindrum parabolicum ad parallelepipedum illi aequale; cum verò hac praesenti propositione praxis demonstrata sit etiam vngulam ad parallelepipedum reducendi, quod eidem sit aequale: qui horum parallelepipedorum rationem cognouerit, etiam proportiones cognitas habebit, quae sunt inter cylindrum parabolicum eiusque vngulam".

la manière de reconnaître le rapport entre l'onglet parabolique et le cylindre qui contient l'onglet, ou entre l'onglet et le reſte du cylindre, etc. et je m'étonne grandement que vous ne l'avez pas lu, ou, ſi vous l'avez lu, de l'avoir diſſimulé.

Du reſte, avec tout votre examen de la Cyclométrie vous n'avez fait autre choſe que de montrer que de deux rapports connus dont le premier multiplie le ſecond autant de fois que ce dernier multiplie un troiſième, ce troiſième, par les inventions que l'Auteur a appliquées à la première quadrature, ne devient pas connu. Mais l'Auteur procède par une voie tout à fait différente et par conſéquent n'a nullement eu l'intention de faire connaître de deux rapports également multipliés un troiſième, parce que la ſolution de ceci dépend du méſolabe. Il eſt donc manifeſte que votre ἐξέτασις non ſeulement ne renverſe pas la première quadrature de l'Auteur mais même ne la touche pas.

Cependant digne de louange eſt votre effort, *par lequel vous avez avec plus de diligence que de ſuccès tenté une choſe ardue* [34]). Ce n'eſt pas de peu d'importance que parmi tant d'excellents géomètres de ce ſiècle, vous, entre les premiers, vous vous avez choiſi cette tâche. Qu' une autre fois cette étude, ſi vous avez le loiſir de vous y appliquer, oblige l'Auteur et moi d'un nouveau bénéfice.

vngulam continet; vel inter vngulam & refiduum cylindri &c. atque hoc miror valdè, aut non legiffe Te aut fi legeris diffimulaffe.

Caeterum cum toto Cyclometriae examine nil aliud egeris, quam oftendere quod ex notis duabus rationibus, quarum prima toties multiplicat fecundam, quoties haec multiplicat tertiam, per auctoris inuenta, quae primae adhibuit quadraturae, tertia non innotefcat, Auctor vero toto caelo diuerfâ incedat viâ, adeoque ex duabus notis rationibus aequimultiplicatis, nullo modo intenderit tertiam notam facere, quia illius folutio dependet à mefelabio, manifeftum eft 'εξέτασιν tuam, non folum primam Auctoris quadraturam non euertere, fed illam ne quidem impetere.

Laude tamen dignus eft conatus tuus, *quo licet maiori diligentia quam fucceffu rem arduam tentaueris* [34]), non exiguum eft tot inter eximios hoc aeuo geometras, Te primos inter, hanc Tibi prouinciam delegiffe. quod rurfus ftudium, adhibere fi vacet, & Auctorem & me nouo affeceris beneficio.

---

[34]) Allusion a la phrase qui suit, employée par Huygens dans la préface de l'ouvrage jumeau qui contient l'*Ἐξέτασις*: „intellexi tandem, majori subtilitate quam successu rem arduam tentatam fuisse". Voir la p. 287 du T. XI.

CHRISTIANI HUGENII CONST. F.

AD

C.V. FRAN. XAVER. AINSCOM, S.I.

EPISTOLA,

Qua diluuntur ea quibus Ἐξέτασις Cyclometriæ *Gregorii à S^to. Vincentio* impugnata fuit.

HAGÆ-COMITUM,

Apud ADRIANUM VLACQ

cIↃ IↃC LVI.

Au Très-Savant Seigneur Fr. Xaverius Ainscom Christiaan Huygens présente ses salutations [1]).

Le livre [2]), qu'en votre nom vient d'envoyer ici votre Apelles Seghers [3]), me fut, très-ſavant ſeigneur, auſſi bien venu que le ſont ordinairement les choſes dont la longue attente augmente le déſir [4]). Depuis longtemps déjà j'avais appris que vous aviez entrepris le patronage de la Quadrature de Vincentius et tout récemment on manda de Louvain et de Rome que l'ouvrage était déjà conduit par vous preſque juſqu' à ſa fin et qu' une partie était auſſi conſacrée a notre Exetaſis [5]). Auſſi, non ſeulement parcourai-je tout votre commentaire avec avidité, mais peſai-je plus exactement encore ce qui me regardait plus ſpécialement, et je réſolus de vous écrire brièvement ce que j'en penſe. Quant à moi je me ſuis étonné que, malgré que vous ne me nommiez nullement en dernier lieu [6]) parmi ceux qui plus ſolidement que d'autres ſe ſont occupés de votre Quadrature [7]), vous déclarez plus loin [8]) à tel point ſans valeur toutes mes objections et tous mes arguments, qu'ils ne touchent pas même ce qu' ils tâchent de renverſer. Car dans le chemin même que j'ai pris, et du tout au tout comme on dit, je me ſerais trompé et je n'aurais nullement ſaiſi l'intention de celui que j'ai voulu réſuter. Toutefois, des gens très-ſavants ont déclaré que j'avais renverſé de fond en comble les fictions de vous autres, et à leurs jugements, malgré que vous peut-être ne les partagiez pas, je crois que les gens intelligents accorderont beaucoup plus de prix qu' à l'opinion de ceux qui félicitent vous et les vôtres ſur la quadrature trouvée. Parmi les membres de votre société le très-excellent Tacquet m'a répondu *qu'il avait lu avec attention et beaucoup approuvé notre Exetaſis*, *et que j'avais de plein droit*

---

[1]) La présente lettre publique de Huygens à Aynscom fut déjà insérée parmi la „Correspondance" aux p. 492—502 de notre Tome I, où l'on trouvera dans les notes qui l'accompagnent, plusieurs variantes empruntées à une minute écrite de la main de Huygens. Il nous semblait toutefois que cette lettre ne devait pas être omise parmi les autres ouvrages imprimés de Huygens, ne fût-ce qu'à cause de la traduction française que nous ajoutons.

[2]) L'ouvrage d'Aynscom mentionné à la p. 244 du Tome présent.

Cl. Viro Do. Fr. Xaverio Ainscom Christianus Hugenius S. D. [1])

Liber ille [2]) quem non ita pridem tuo nomine huc misit Apelles vester Segerus [3]), tam mihi acceptus fuit, Vir Clariss. quàm solent esse ea quorum diutina expectatio desiderium auget [4]). Jam diu enim intellexeram te Quadraturae Vincentianae patrocinium suscepisse, novissimèque & Lovanio & Româ significatum fuerat opus illud jam penè à te ad umbilicum perductum, in quo pars etiam quaedam nostrae Exetasi dicata esset [5]). Itaque cum avidè totum commentarium tuum evolvi, tum accuratiùs reliquis illa expendi quae propiùs ad me pertinebant. De quibus quid visum fuerit breviter tibi perscribere constitui. Equidem miratus sum, cum me non ultimum inter eos recenseas [6]) qui caeteris solidiùs in examinanda Quadratura vestra [7]) versati sint, postea tamen [8]) adeò nihili animadversiones omnes meas, omniaque argumenta praedicare, ut quod convellere nituntur, id ne attingant quidem. Nempe ego totâ viâ, totoque, quod ajunt, coelo erravi, quemque refutare volui, ejus mentem minimè sum assecutus. Veruntamen Viri Doctissimi funditùs evertisse me commenta vestra pronunciavere, quorum judiciis, etsi vos fortasse non statis, apud intelligentes tamen multò pluris futura reor quàm eorum qui vobis de reperta Quadratura gratulantur. E societate vestra Vir eximius A. Tacquetus, *accuratè sibi lectam esse multumque probari Exetasin nostram rescripsit*, & *rectè me urgere auto-*

---

[3]) Consultez, sur le père Jésuite Daniel Seghers, peintre de renom, la note 1 de la Lettre N°. 96, p. 147 du T. I.

[4]) Consultez à ce propos les pp. 242 et 244 du Tome présent.

[5]) Voir la „Responsio III. Ad 'Ἐξέτασιν Clariss. D. Christiani Hugenij", p. 249—261 du Tome présent.

[6]) Voir, pour le passage en question, la note 18, p. 244 du Tome présent.

[7]) C'est-à-dire la quadrature de Grégoire, rédigée, comme celui-ci l'avait avoué (voir le troisième alinéa de la p. 242 du Tome présent), par ses éleves, parmi lesquels Aynscom occupait sans doute une place importante. C'est ce qui explique le pluriel du latin, ici et souvent dans la suite.

[8]) Il s'agit d'un passage de la „Responsio III", voir la p. 261 du Tome présent.

appuyé ſur ce que l'Auteur de la Quadrature avait à expliquer, combien de fois le premier rapport contienne le ſecond et celui-ci le troiſième, et que, s'il y reſtât en défaut, il ne ferait jamais connaître le troiſième inconnu et par conſéquent ne donnerait pas la Quadrature laquelle dépend de la connaiſſance de ce troiſième rapport [9]). Un autre, également de votre Compagnie, eſt le très ſavant Van Gutſchoven, duquel je ſais qu'à l'occaſion il avoue que les grands efforts du père Grégoire ont complètement échoué par ſuite de notre travail [10]). Telle eſt auſſi l'opinion du profeſſeur de mathématiques de l'Académie d'Oxford J. Wallis, ſavant univerſel, ce qu'il fit paraître publiquement dans ſon très ſubtil ouvrage recemment édité de l'Arithmétique des Infinis [11]). Et je pourrais citer pluſieurs autres qui compteraient pour mon parti ſi je n'étais convaincu qu'en Géométrie il faut agir plus par raiſonnement que par autorité. Et ſans doute vous allez dire que ceux qui m'applaudiſſent ſont emportés par la même erreur que moi, et qu'ils ont eux-mêmes auſſi peu pénétré le ſens de votre Auteur. Pour cette raiſon je m'appliquerai plutôt à débaraſſer ceux-ci, autant que moi même, de l'accuſation d'ignorance ou de bravade. Toutefois je crois devoir répondre auparavant à quelques autres choſes que vous m'objectez. J'ai tâché, en préſentant diverſes conjectures, à rendre probable que des quatre quadratures vous donnez la préférence à celle qui eſt poſée la première. C'eſt ce que vous réfutez [12]) de manière à diſſimuler et à paſſer l'argument que j'avais dit être le principal. Quant à moi, qu' il vous ſoit permis de placer cette première quadrature au lieu qui vous plaira. Moi je jugerai avoir abondamment accompli mon deſſein lorſque je démontrerai qu'elle eſt abſurde et je ne crois pas que celui auquel j'aurai rendu cela évident, demandera la réfutation des trois autres et même que, ſi elle lui fût offerte, il la lira. Car il eſt tellement certain qu' elles repoſent ſur les mêmes principes, ſavoir ſur la doctrine des Proportionnalités et de ce qui eſt dit de la conſtruction d'un ſolide au moyen de deux figures planes, que cela ne pourrait être nié. C'eſt ce que vous niez cependant et à diverſes repriſes vous inſiſtez [13]) ſur ce que votre Auteur, dans cette première Quadrature, ne s'eſt pas ſervi de la conſidération des Proportionnalités. Mais je ne m'explique point votre audace; car vous n'ignorez pas que l'une comme l'autre, les propoſitions 12, 39 et 40 du livre 10 ſont démon-

[9]) Voir la lettre de Tacquet du 2 décembre 1652, p. 194 du T. I.

[10]) Voir sa lettre du 10 février 1653, p. 219 du T. I.

[11]) Voici ce qu'on trouve, à propos de l'ouvrage de Grégoire et de la critique de Huygens, dans la „Dedicatio" de l'ouvrage mentionné de Wallis (cité dans la note 2, p. 340 du T. I): „Monuit autem eorum aliquis" [c'est-à-dire un des savants anglais auxquels Wallis avait proposé un problème se rattachant à sa quadrature du cercle au moyen d'un produit infini] „ut *Gregorii a Sancto Vincentio* Opus Geometricum consulerem, (cujus ne nomen quidem antea audiveram,) ut qui magno volumine hujusmodi res quae ad circuli Quadraturam spectent exposuerit. Huic ego monito obtemperabam; librumque utut tanto erat volumine ut non

rem Quadraturae, ut exhibeat, quoties ratio prima contineat ſecundam & ſecunda tertiam, idque niſi praeſtet, tertiam incognitam explicaturum nunquam, ac proinde non daturum quadraturam, quae à notitia tertiae illius rationis dependet [9]). Alter item apud vos eſt Clariſſimus Gutſchovius, quem paſſim profiteri ſcio magnos P. Gregorii conatus noſtrâ operâ penitùs concidiſſe [10]). Neque aliter ſentit Vir undiquaque Doctiſſimus & in Academia Oxonienſi Mathematum Profeſſor J. Walliſius, idque publicè teſtatum fecit in edito nuper ſubtiliſſimo opere de Infinitorum Arithmetica [11]). Poſſemque & alios complures referre quorum pro me facit calculus, ni perſuaſum haberem in re Geometrica rationibus magis quam autoritate agendum. Neque enim dubito quin dicturus ſis, eodem mecum errore ductos qui mihi applaudunt, ipſos quoque nihilo rectiùs penetraſſe ſenſa autoris tui. Quare id agam potiùs, ut procul à me ſimul atque illis hanc, ſive inſcitiae, ſive oſcitantiae culpam amoliar. Prius autem ad alia quoque nonnulla quae mihi objicis reſpondendum opinor. Variis allatis conjecturis veriſimile reddere conatus eram, ex quatuor quadraturis eam à vobis praeferri quae prima ponitur. Hoc ita refutas [12]), ut, quod ego praecipuum argumentum dixeram, diſſimules praetereaſque. Verum per me licet ut quo loco vobis viſum erit primam quadraturam habeatis. Ego me abundè praeſtitiſſe arbitrabor ſi hanc abſurdam eſſe evincam: cuique hoc planum fecero, eum non puto reliquarum trium confutationem expetiturum, imò, ſi offeratur, ne lecturum quidem. Etenim quod iiſdem omnes principiis innitantur, Proportionalitatum nimirum doctrinae atque ei quae eſt de ductibus plani in planum, tam certum eſt, ut negari nulla ratione poſſit. Negas tu tamen hoc, crebroque inculcas [13]), in prima hac quadratura, proportionalitatum conſideratione, non uti autorem tuum. Sed miror qua fronte; cum non ignores utique propoſitionem 12. 39. & 40. libri 10.

---

integrum perlegere vacaverit, pervolvi utcunque; sollicitus an inde quae ad rem nostram facerent reperire possem. Inveni autem aliquando easdem & illi & mihi (quod nihil mirum erat) speculationes obtigisse, licet diversis methodis eo pervenerimus, Exempli gratia, quod appellat ille *plani in planum ductum*, id ipsum est quod nos & hic, & in Tractatu de Conicis sectionibus (qui huic gemellus est eodem anno 1652 conceptus & primitus formatus,) dicitur, *ductus rectarum omnium unius plani in alterius respectivas rectas*.... Et alia fortasse nonnulla.... Verum (utut ille multa habeat acute inventa, methodo à nostra plane aliena) illud quod apud eum maxime quaerebam nusquam inveni, neque enim ille vel eousque rem perduxerat, nec etiam circuli quadraturam, quam se invenisse perhibet, omnino attingit, sed ad propositionem nostrae prop. 136, non multum absimilem ubi pervenerat, ratus inde se circuli quadraturam invenisse, non tamen assecutus est; uti in 'Εξέτασει sua ostendit D. Hugenius".

Quant à la „prop. 136", Wallis y démontre que la quadrature du cercle dépend de la cubature du solide produit par l'application de l'opération „ducere planum in planum" aux demi-paraboles HXTB et AYVG de la figure de la p. 254 du Tome présent, c'est-à-dire du même solide dont Grégoire a fait emploi dans sa quadrature prétendue.

[12]) Voir les §§ 2 et 3 de la „Responsio III", p. 251 du Tome présent.

[13]) Voir le § 4, p. 251—253 du Tome présent.

trées au moyen de la 8me [14]) du même livre et cette dernière par la prop. 114 du livre 8, qui tout entier traite des Proportionnalités.

Enſuite vous dites [15]) que j'ai pris une peine ſuperflue en faiſant connaître les deux rapports numériques des ſolides, deſquels vous aviez à déduire le troiſième; en effet, l'auteur de l'opus Geometricum, s'il faut vous croire, les aurait déjà reconnus et démontrés à d'autres longtemps avant que mon ouvrage et même que moi j'avais vu le jour. Mais pourquoi alors, je vous prie, ne les a-t-il pas fait connaître en nous délivrant de cette peine. Car il est certain que leur connaiſſance devait contribuer la plus grande partie et être tout à fait néceſſaire à effectuer la quadrature, ſi ſeulement celle-ci fût poſſible à accomplir. Mais je vois que vous nommez toutes les choſes que, pour une raiſon quelconque, vous vous imaginez pouvoir être connues, auſſi connues que celles qui ont manifeſtement été trouvées. Ainſi vous me renvoyez à la propoſition 43 du livre 10 dans laquelle vous prétendez que l'un et l'autre rapport ſont devenus connus. Mais cette propoſition les donne auſſi peu [16]) que la dernière propoſition de ce livre ne donne le rapport entre le cercle et le carré ſur ſon diamètre. D'ailleurs, ceci reſſemble à ce que vous répondez au ſujet de l'onglet Parabolique [17]). Savoir que votre auteur aurait déjà découvert, il y a trente ans, quel eſt le rapport de cet onglet au cylindre. Quant à moi j'ai avoué [18]) que ce rapport pouvait être déduit de ce que l'auteur avait déjà communiqué; mais qu'il n'avait pas fait connaître le rapport même me ſemblait un argument aſſez évident qu'il n'en connaiſſait pas le réſultat. Car il n'était guère admiſſible que, le conſidérant comme ſuperflu, il eût laiſſé de le mettre par écrit, s'il eſpérait pouvoir le trouver avec ſi peu de peine, tandiſque pour arriver au théorème il avait développé dix-huit propoſitions [19]). Il importe peu s'il l'avait jugé digne d'être mis une propoſition, ce que vous dites qu'il n'avait pas voulu faire, ou ſeulement dans un corollaire. Mais même dans un corollaire le rapport ne ſe trouve indiqué nulle part. Car dans celui que vous citez on lit ſeulement qu' une méthode eſt communiquée, par laquelle on peut rechercher le rapport de l'onglet au cylindre qui le contient, et qu'il ſerait connu ſi les rapports de quelques ſolides entre eux euſſent été trouvés. Mais il laiſſe aux lecteurs de rechercher auſſi bien les rapports de ces ſolides que leur analogie avec celui de l'onglet et ſon cylindre: ce que vous même vous n'ignorez pas. C'eſt

[14]) Voir la proposition reproduite dans la note 28, p. 257—258 du Tome présent. On y trouve citée en effet la „Prop. 114" du Lib. 8" (p. 926 de l'ouvrage de Grégoire), laquelle est comme il suit:

A B C „Data sit quaeuis quantitas AC, vtcunque diuisa in B, & alia quantitas D. Dico rationem AB ad D, vnà cum ratione BC ad D, aequalem esse rationi AC ad D."

Il est clair d'ailleurs, que ce n'est pas de l'emploi de cette proposition évidemment juste que provient l'erreur de Grégoire, attribuée par Huygens dans l' 'Ἐξέτασις (p. 317 du T. XI) à l'application peu heureuse des „inventions" de Grégoire „en matière de proportionnalités." Ainsi l'argumentation peut ne pas sembler tout à fait digne de Huygens; mais remarquons

ex 8va. [14]) ejusdem libri demonstrari, hanc verò per 114. libr. 8. qui totus est de Proportionalitatibus.

Porrò superfluam me ais [15]) operam sumpsisse, cum priores duas corporum rationes numero exhibui, ex quibus tertia vobis definienda erat; illas enim autor operis Geometrici, si credimus, multò antè quàm ego edidissem, imò quàm ipse editus essem, perspectas habuit aliisque demonstravit. Quaeso cur non explicuit igitur, nosque ea levavit molestia? Nam certum erat plurimùm ad absolvendam quadraturam, si modo absolvi posset, eorum notitiam conferre debere, planèque esse necessariam. Sed vobis cuncta perinde nota dici video quae cognosci posse aliquâ saltem ratione imaginamini, atque ea quae liquidò comperta fuerint. Itaque ad propos. 43. lib. 10. me remittis, in qua utramque rationem notam fieri asseris. Illa verò non magis ipsas expedit [16]) quam propositio postrema ejusdem libri, rationem quae sit inter circulum & quadratum diametri. Prorsùs huic simile est quod de Parabolica ungula respondes [17]). Videlicet jam à triginta annis exploratum habuisse autorem tuum, quaenam sit illius ad cylindrum suum proportio. Equidem ex iis quae jam tradiderat, erui illam posse fassus sum [18]); ipsum verò adhuc cujusmodi foret nescivisse, satis evidens argumentum videbatur, quod eam non exprimeret. Neque enim credibile, cujus theorematis gratia duodeviginti [19]) propositiones elucubrasset, id tanquam superfluum non esse adscripturum, si tam nullo negotio inveniri posse speraret. Parum intererat utrum propositione illud dignatus fuisset, (quod noluisse eum dicis) an corollario tantum. Sed nec in corollario ratio illa uspiam expressa est. Nam in eo quod adducis, hoc solum legitur, methodum traditam esse qua ratio ungulae ad cylindrum quo continetur, investigari queat, eamque notam fore, si quorundam inter se corporum rationes inventae fuerint. Atqui & horum corporum rationes, & ex iis quae sit inter ungulam cylindrumque suum analogia, lectoribus disquirenda relinquuntur: idque ipse non nescis. Quare non

---

qu'il ne s'agit ici de sa part que de détruire le subterfuge futile d'Aynscom qui avait voulu nier que des propositions comme les „Prop. 8" et „12" du „Lib. 10", lesquelles Huygens avait eu en vue, n'appartiendraient pas à la matière des proportionnalités laquelle fut traitée par Grégoire dans le „Lib. 8. De Proportionalitatibus".

[15]) Voir le § 7 de la „Responsio III", p. 255—257 du Tome présent.

[16]) En effet, la „Prop. 43", mentionnée p. 279 du T. XI au § 8, ne conduit pas aisément à des résultats numériques.

[17]) Voir le quatrième alinéa du § 8, p. 259—261 du Tome présent.

[18]) Voir le quatrième alinéa de la p. 329 du T. XI.

[19]) Il s'agit des dix-huit premières propositions, p. 1020—1033, de la „Pars quinta" du „Lib 9", lesquelles précèdent la dix-neuvième de la même „Pars", laquelle est comme il suit: „Prop. 99: Oporteat vngulae cylindri parabolici parallelepipedum aequale exhibere". En effet, cette „Pars quinta" est consacrée prèsqu'entièrement à la cubature de l'onglet parabolique; mais on n'y rencontre pas le théorème simple énoncé par Huygens dans l'avant-dernier alinéa de la p. 329 du T. XI.

pourquoi vous avez mauvaiſe grâce de m'accuſer à ce ſujet de diſſimulation, lorſque vous-même vous paraiſſez écrire le contraire de ce que vous penſez.

Mais examinons maintenant l'erreur *capitale* que vous m'attribuez [20]). Elle ſerait commiſe au ſujet du mot *continere*, d'où, comme je ne l'aurais pas bien compris, il ſerait arrivé que, croyant combattre votre Quadrature, je n'euſſe rien fait moins que cela, et que de même tous ceux, qui ont cru que je l'avais fait chanceler, euſſent été aveugles. Quant à moi, j'ai cité la double ſignification que j'avais trouvée de ce mot dans l'opus Geometricum, mais j'ai paſſé la vôtre [21]) qui eſt auſſi celle du Père Saraſa; parce que je l'ignorais alors. Ainſi mon erreur *capitale* conſiſte en ceci, qu'à cette époque je n'avais vu ni le livre du Père Saraſa [22]), ni votre corollaire. Mais peut-être, ſi j'euſſe connu votre explication je n'aurais pas pour cela jugé à propos de la mentionner, parce qu'elle importe ſi peu pour la question et qu'elle eſt complètement monſtrueuſe et abſurde comme il paraîtra par l'exemple que vous y ajoutez: je montrerai enſuite de combien vous avancez la choſe par elle. La propoſition 40 du livre 10 eſt ainſi conçue: *Ceci étant poſé, je dis que le rapport du ſolide produit par RS ſur XY au ſolide par TV ſur Z& contient autant de fois le rapport du ſolide par IK ſur NO au ſolide par LM ſur PQ que ce même rapport contient le rapport du ſolide par AB ſur EF au ſolide par CD ſur GH* [23]). Propoſition que vous, *ſelon l'intention*, comme vous dites, *de l'Auteur* (bien entendu après avoir changé la phraſe), vous nous reproduiſez en ces termes: *Ceci étant poſé, je dis que le rapport du ſolide produit par RS ſur XY au ſolide par TV ſur Z& eſt compoſé des rapports qui ſont autant de fois les multipliés des rapports qui compoſent le rapport du solide par IK ſur NO au ſolide par LM ſur PQ que ces mêmes rapports ſont les multipliés de ceux dont ſe compoſe le rapport du ſolide par AB ſur EF au ſolide par CD ſur GH.*

La belle explication! Et c'eſt pour ne pas l'avoir attrappée que je n'ai pas ſaiſi le ſens qui convient à vos raiſonnements. Mais à qui peut-il venir dans l'eſprit qu'un mathématicien écrive toute autre choſe que ce qu'il demande à comprendre? ou qui voudrait appliquer un ſens encore plus compliqué à des théorèmes déjà trop obſcurs? Certainement vous ſavez que tous ceux qui ſont entrés en controverſe avec vous autres ont pris le mot *continere* dans le même ſens que moi et qu'à perſonne il n'eſt venu dans la penſée qu'en liſant ſur le rapport de deux grandeurs, il eût à appliquer ceci aux rapports *partiels* dont ſe compoſent les rapports *totaux*? [24]) Mais voici quelle fut, en dehors de ceux dont les remarques ſont parvenues entre vos mains, l'opinion preſque identique avec la nôtre de l'Incomparable Deſcartes, duquel ſi vous eſtimez qu'il fut moins excellent geomètre qu'*Algébriſte* [25]) vous

[20]) Voir le second alinéa du § 8, p. 259 du Tome présent.

[21]) Comparez le dernier alinéa du § 7, p. 257 du Tome présent.

[22]) L'ouvrage mentionné à la p. 242 du Tome présent.

[23]) C'est la proposition 40 de Grégoire telle qu'on la trouve rédigée à la p. 98 de l'ouvrage

ſatis ingenuè hic me diſſimulationis arguis, ubi ipſe contra quam ſentias, ſcribere videaris.

Jam verò de *palmari* errore [20]) quem mihi impingis videamus. Is circa verbum *continere* commiſſus eſt, ex quo non rectè percepto factum eſt ſcilicet, ut, cum Quadraturam veſtram oppugnare me crederem, nihil minus egerim, omneſque item, qui me labefeciſſe eam judicarunt, caecutierint. Ego ſignificationem duplicem ejus verbi quam in opere Geometrico inveneram, adduxi, tuam, quae & P. Sarraſae eſt, interpretationem, quoniam adhuc ignorabam, praeterii [21]). Igitur hic *palmaris* eſt error meus, quod nec P. Sarraſae librum [22]), nec tuum Corollarium tum temporis videram. Sed nec fortaſſe ſi ſciviſſem explicationem veſtram, propterea memorandam duxiſſem, cum parum adeò ad rem faciat, ſitque monſtroſa planè atque abſona, uti ex adjecto ſpecimine liquebit: quantum verò ea promoveritis deinde exponam. Propoſitio 40. libri 10. eſt hujuſmodi. *Iiſdem poſitis, dico rationem ſolidi ex* RS *in* XY *ad ſolidum ex* TV *in* Z&, *toties continere rationem ſolidi ex* IK *in* NO *ad ſolidum ex* LM *in* PQ, *quoties haec ipſa ratio continet rationem ſolidi ex* AB *in* EF *ad ſolidum ex* CD *in* GH [23]). Quam propoſitionem *juxta mentem*, ut ais, *autoris*, (variatâ tantùm phraſi ſcilicet) ſic nobis enarras. *Iiſdem poſitis, dico rationem ſolidi ex* RS *in* XY *ad ſolidum ex* TV *in* Z&, *conſtitui ex iis rationibus quae toties multiplicatae ſunt illarum rationum ex quibus conſtituitur ratio ſolidi ex* IK *in* NO *ad ſolidum ex* LM *in* PQ, *quoties hae ipſae rationes multiplicatae ſunt earum ex quibus conſtituitur ratio ſolidi ex* AB *in* EF *ad ſolidum ex* CD *in* GH.

Pulchra verò explanatio! quam quia ego pervidere non valui, ſenſum convenientem ratiociniis veſtris non percepi. At cui hoc in mentem veniret, Mathematicum longè aliud ſcribere quàm intelligi poſtulet? quiſve magis adhuc intricatum ſenſum theorematibus jam nunc nimium obſcuris affingere vellet? Omnes profectò qui vobis controverſiam moverunt, haud aliter atque ego, verbum *continere* accepiſſe noſſi, neque ulli hoc incidiſſe, ut cum de ratione inter duas magnitudines legeret, id ad *partiales* referret, ex quibus *totales* conſtituerentur [24]). Ecce verò ut praeter eos quorum animadverſiones ad manus veſtras pervenere, eadem planè quae nobis, circa has propoſitiones & ſignificationem verbi *continere*, opinio fuit Incomparabili Carteſio, quem ſi minus inſignem Geometram quam *Algebriſtam* fuiſſe arbitraris [25]), parum ex vero judicas. Ejus

d'Aynscom. Ensuite celui-ci fait suivre, en guise d'introduction à la rédaction modifiée qui suit, la phrase: „Hoc est iuxta auctoris mentem".

[24]) Consultez sur cette partie de la réplique de Huygens la note 20, p. 254 du Tome présent.

[25]) Il s'agit d'un passage, p. 108 de l'ouvrage d'Aynscom, où celui-ci, pour diminuer l'autorité de de Roberval, qui avait été cité en témoin par Auzout comme approuvant la critique de Mersenne, en appelle à l'opinion défavorable de Descartes sur de Roberval. Voici ce passage dont d'ailleurs Huygens avait marqué sa désapprobation dans sa lettre à de Roberval de 20 juillet 1656, p. 457—458 du T. I:

„Equidem de viri [de Roberval] illius fama, nihil detractum volo: at cum nulla illius opera

jugez à tort. De lui on m'a communiqué la copie d'une lettre [27]) à un ami [26]), longtemps après qu' eut paru notre Exetaſis [28]); comme non seulement elle confirme ce que j'ai dit, mais de plus ſe rapporte toute entière à l'opus Geometricum du Père St. Vincent, j'ai cru devoir la tranſcrire intégralement ici. Le texte françaís eſt le ſuivant.

Monsieur.

J'Ay gardé vos livres un peu long temps, pource que je deſirois en vous les renvoyant, vous rendre compte de la Quadrature du cercle pretendue, & j'avois bien de la peine à me reſoudre de feuilleter tout le gros volume qui en traite. En fin j'en ay veu quelque choſe & aſſez ce me ſemble pour pouvoir dire qu'il ne contient rien de bon qui ne ſoit facile, & qu'on ne puſt eſcrire tout en une ou deux pages. Le reſte n'eſt qu'un paralogiſme touchant la Quadrature du cercle, enveloppé en quantité de propoſitions qui ne ſervent qu'à embroüiller la matiere, & ſont tres ſimples & faciles pour la pluſpart, bien que la façon dont il les traite, les face paroiſtre un peu obſcures. Pour trouver ſon paralogiſme, j'ay commencé par la 1134e *page, ou il dit: Nota autem eſt proportio ſegmenti* LMNK *ad ſegmentum* EGHF [30]), *ce qui eſt faux, & la preuve qu'il en donne eſt fondée ſur la* 39e *propoſition en la page* 1121. *du meſme livre* [31]), *ou il y a une erreur treſmanifeſte, qui conſiſte en ce qu'il veut appliquer à pluſieurs quantitez conjointes ce qu'il a prouvé auparavant des meſmes quantitez diviſées. Car par exemple, ayant les* 4. *ordres de proportionelles* 2, 4, 8, 2, 8, 32.
&
2, 6, 18, 2, 10, 50.
bien qu'il ſoit vray que 8. *eſt à* 32. *en raiſon doublée de ce que* 4. *eſt à* 8. *Et que* 18. *eſt auſſi à* 50. *en raiſon doublée de ce que* 6. *eſt à* 10. *il n'eſt pas vray pour cela que* 8 + 18. *c'eſt à dire* 26. *ſoit à* 32 + 50. *c'eſt à dire* 82. *en raiſon double de celle qui eſt entre* 4 + 6. *c'eſt à dire* 10, & 8 + 10, *c'eſt à dire* 18. *Tous ſes raiſonnements ne ſont fondez que ſur cette faute, & ce qu'il eſcrit de Proportionalitatibus & de Ductibus* [32]), *ne ſert qu'à l'embaraſſer, & ne me ſemble d'aucun uſage, pour ce que fruſtra ſit per plura quod poteſt fieri per pauciora.*

(si quae ediderit) videre hic contigerit, adeoque de illius in Geometricis scientia indicare non possim, nihil est magnoperè cur ipsius auctoritate standum mihi sit: eorum porro iudicio viri capacitatem qui norunt, credere me si velit Censor [Auzout], audiat quid de illo, ad amicum perscripserit è Suecia homo Gallus, idem & Algebrista egregius Renatus Des Cartes: verba huius sunt ipsissima: Mais ie suis a present en un pais si eloigné, que ie ne puis mesme esperer d'y voir les escrits dont vous me parlez: car outre qu'il seroit difficile de les apporter icy, ie n'y aurois pas aussi beaucoup de loysir pour les examiner: c'est pourquoy si vous escriuez au R. P. Gregorius à S. Vintcentio, ie vous prie de l'asseurer de mon tres-humble seruice, & de luy faire sçavoir de ma part, que bien que ie n'approuue pas sa quadrature de cercle, ie ne crois pas neanmoins que le S. Æ. R[oberval] ait assez d'esprit pour la refuter, & ainsi que pendant qu'il n'aura point d'aduersaires plus forts que celui-là, il ne luy sera pas malaysé de se defendre".

Quant à ce dernier fragment d'une lettre de Descartes à un inconnu, il a été reproduit par

ad amicum [26]) epiſtolae copia mihi facta eſt [27]), cum jam diu exetaſis noſtra prodiiſſet [28]), quâ quoniam non tantùm id quod dixi comprobatur, ſed & tota inſuper ad opus Geometricum P. à Sto. Vincentio pertinet, integram hic adſcribere viſum eſt. Gallicè ſic habet [29]).

. . . .

. . . .

Quorum latinè haec eſt ſententia.

Libros tuos retinui diutiùs, quod remittere eos nolebam quin ſimul opinionem meam tibi exponerem de nova iſta quam venditant circuli Quadratura; vix autem à me ipſo impetrare poteram, ut ingentia quibus tractatur volumina evolverem. Tandem tamen nonnulla in iis delibavi, è quibus ſatis tutò mihi pronunciare poſſe videor, nihil ibi boni inveniri, quod non captu facile ſit; undque aut alterâ paginâ explicari potuerit. Caetera merum paralogiſmum de quadratura circuli continent, multis propoſitionibus implicitum, quaeque hoc tantum efficiunt, ut omnia evadant intricatiora. Pleraeque verò ſimpliciſſimae ſunt & facili ratione conſtant, licet tractandi methodus obſcuriores reddiderit. Paralogiſmum quaerere inſtitui, initio facto ad paginam 1134. *ubi hoc ait: Nota autem eſt proportio ſegmenti* LMNK *ad ſegmentum* EGHF [30]); *quod falſum eſt, pendet enim hujus demonſtratio à propoſitione* 39, *pagina* 1121. *ejuſdem libri* [31]), *ubi manifeſtus error occurrit, dum pluribus quantitatibus conjunctim applicatur, quod de ſingulis ſeorſim fuerat oſtenſum. Etenim ex. gr. poſitis quatuor proportionalium ordinibus* 2, 4, 8, 2, 8, 32,
2, 6, 18, 2, 10, 50,
licet verum ſit rationem 8. *ad* 32. *duplicatam eſſe ejus quae* 4. *ad* 8. *itemque rationem* 18. *ad* 50. *duplicatam eſſe ejus quae* 6. *ad* 10. *non tamen idcircò verum eſt* 8 + 18. *hoc eſt*, 26. *eſſe ad* 32 + 50. *hoc eſt ad* 82. *in ratione duplicata ejus quae* 4 + 6. *hoc eſt*, 10. *ad* 8 + 10. *hoc eſt*, 18. *Vnicum ei fundamentum haec vitioſa argumentatio; quaeque de Proportionalitatibus ſcribit & de Ductibus* [32]), *tantum majoribus ipſum difficultatibus involvunt, neque alicujus uſus videntur, ſiquidem fruſtra fit per plura quod poteſt fieri per pauciora.*

Adam et Tannery, à la p. 465 du T. V de leur édition récente des Œuvres de Descartes.

[26]) Il s'agit du professeur de Leiden, Frans van Schooten.

[27]) Consultez la Lettre N°. 169 du 13 décembre 1653, p. 258 du T. I.

[28]) Puisqu'elle parut en décembre 1651; voir la p. 275 du T. XI.

[29]) Voir, à côté, cette version française.

[30]) Il s'agit de la proposition 53, sur laquelle on peut consulter le § 1 de la p. 277 du T. XI; les segments LMNK et EGHF, dont il est fait mention ici, correspondent aux aires CDIH et EFLK mentionnées au lieu cité, p. 277 du T. XI.

[31]) Consultez, sur cette proposition, le § 10 de la p. 280 du T. XI et la page 317 du même Tome avec les notes 6, 7 et 8.

[32]) Voir les „Lib. 8" et „7" de l'ouvrage de Grégoire, sur lesquels on peut consulter la p. 317 du T. XI.

Dont le ſens eſt en latin [33]):

. . . .

Vous voyez, excellent Seigneur, que Deſcartes non plus n' eût reconnu votre *Ceci est conforme à l'intention de l'auteur* [34]), mais eût dit plutôt, ce qui eſt réellement le cas, que dans une cauſe déſeſpérée vous avez cherché ce faux fuyant afin que votre Quadrature en changeant continuellement de forme à l'inſtar de quelque Protée, puiſſe échapper à ceux qui la reſſerrent de plus en plus. Mais, eh bien, regardons maintenant de près à quoi vous ramenez la choſe après que vous avez tiré du mot *continere* une nouvelle ſignification par laquelle vous avez ſi ſavamment remis à neuf de vieux théorèmes. Dans le Corollaire de la propoſition 40 du livre 10, que vous invoquez ſi fréquemment [35]), vous ne ſemblez avoir fait autre choſe qu' entrelacer les difficultés les unes aux autres afin que celui qui déſirerait ſaiſir le ſens de votre argumentation en déſiſte fatigué avant qu'il ne ſoit arrivé à la fin. Quant à moi je vous ai ſuivi juſqu'à l'endroit où vous faites intervenir les eſpaces Y et Z. J'ai cru qu'il ne fallait pas aller plus loin. Car votre conſtruction eſt ſi manifeſtement vicieuſe et antigéométrique que je ne puis douter que vous vous en étiez aperçu vous-même, mais, parce que vous ne trouviez pas d'autre moyen d'évaſion vous avez eſpéré, je crois, que dans une telle obſcurité perſonne ne s'en apercevrait facilement. *Enſuite*, dites vous, *conſidérons deux plans Hyperboliques Y & Z renfermés entre des droites, parallèles à l'autre aſymptote* [36]). Vous ne les aſſujettiſſez à aucune autre condition que de les enfermer entre des droites parallèles à l'autre aſymptote. Vous ne preſcrivez rien quant à la grandeur de l'une ou de l'autre ou du rapport qu'ils doivent avoir entre eux. Par conſéquent, on pourra découper chacun d'eux auſſi grand ou auſſi petit que l'on veut. Mais bientôt après vous vous mettez à comparer le rapport de l'eſpace Y à Z à d'autres rapports que vous avez admis d'après une détermination définie et vous vous propoſez de démontrer *que le rapport total des plans X à T eſt également multiplié du rapport total de Y à Z que le rapport total des ſolides GH à IK eſt multiplié du rapport total du ſolide LM à NO*. Quoi donc, je vous prie, eſt plus abſurde que d'aſſurer quelque choſe ſur la grandeur d'un rapport qui eſt complètement incertain et vague? Pour moi, je ſuis d'avis que par cela ſeul il eſt aſſez clair combien vains ont été vos efforts d'apporter quelques appuis à la première Quadrature, puiſque dans ce que vous aviez à expliquer en premier lieu vous faillez ſi lourdement. S'il me fallait recher-

[33]) Voir cette version latine à la p. 273.

[34]) Voir, sur cette phrase, la note 23, p. 270.

[35]) Il s'agit du „Scholium" mentionné dans la note 20, p. 254 du Tome présent.

[36]) La Société Hollandaise des Sciences de Harlem est en possession de l'exemplaire de l'ouvrage d'Aynscom qui a appartenu à Huygens. La seule annotation, faite de la main de Huygens, qu'on y trouve (p. 102), se rapporte au passage cursivé ici. Elle est comme il suit: „Cum nulla horum magnitudo definiatur; neque inter se neque ad aliud, poterunt pro

Vides, Vir Egregie, neque Cartesium, vestrum illud *Hoc est juxta mentem autoris* [34]), agniturum fuisse, sed potius, quod res est, dicturum, desperatâ causâ hoc vobis effugium quaesitum, ut quadratura vestra ad instar Protei cujusdam aliâ atque aliâ assumptâ formâ quantumlibet arctè sese constringentibus elaberetur. Verum age, inspiciamus jam quo rem deducas, posteaquam verbi *continere* novam significationem elicuisti, eâque vetera theoremata tam scitè interpolasti. In Corollario propositionis 40. lib. 10. quò tam saepè provocas [35]), id unum egisse videris, unas ex aliis difficultates nectendo, ut si quis argumentationis tuae tenorem consectari cupiat, is defessus absistat priusquam ad finem pervenerit. Ego ad eum usque locum te secutus sum, ubi spatia Y & Z assumi jubes: Inde non ulterius procedendum putavi. Adeò enim manifesto vitio atque ἀγεωμετρησία ibi laborat constructio tua, ut tibimet ipsi exploratum id esse dubitare nequeam: sed quoniam alia evadendi ratio non occurrebat, sperasti, credo, in tanta obscuritate nemini illud facilè animadversum iri. *Dein*, inquis, *assumantur duo plana Hyperbolica* Y & Z, *rectis alteri asymptotorum parallelis inclusa* [36]). Nullâ aliâ praecautione assumuntur quam quod rectis alteri asymptotorum parallelis includi ea necesse sit. De magnitudine utriusque aut ratione quam inter se servare debeant nihil praecipis. Igitur quamlibet magnum aut parvum unumquodque eorum abscindi poterit. Mox tamen rationem spatii Y ad Z cum aliis rationibus comparare instituis, quas prius secundum certam determinationem assumpsisti, tibique hoc demonstrandum proponis, *Rationem totalem planorum* X *ad* T *tam esse multiplicem rationis totalis planorum* Y *ad* Z, *quàm ratio totalis solidorum* GH *ad* IK *multiplicata est rationis totalis solidi* LM *ad* NO. Quidnam, quaeso, absurdius, quàm de quantitate ejus rationis aliquid enunciare, quae prorsus incerta sit ac vaga? Equidem ex hoc solo satis liquere puto, quàm frustra primae Quadraturae suppetias ferre tentaveris, cum in eo quod praecipuè tibi explicandum erat, tam insigniter delinquas. In tribus reliquis an meliore fortunâ usus sis, si me inquirere oporteat, talentum non meream. Id tamen scito perpetuum ad-

---

lubitu assumi, puta ut Y sit centuplo majus quam Z, vel millecuplo. Quid igitur demonstrari potest de ratione eorum totali, nempe rationem planorum X ad T tam esse multiplicem rationis planorum Y ad Z, quam ratio sol. GH ad IK multiplicata est rationis solidi LM ad NO: Quandoquidem prius plana X et T, uti et solida GH, IK, LM, NO certum magnitudinem habent; deinde vero Y et Z pro lubitu assumuntur? Sed non temerè horum determinationem autor omisit, verum ideo quod nulla dari possit absque insigni impudentia".

En vérité, la seule détermination des espaces Y et Z, présupposée par Aynscom, est celle-ci: „quae per inscriptionem figurarum eo modo sunt diuisa & exhausta, quo duo solida LM, NO, per inscriptionem paralelop. diuisa sunt & exhausta"; mais cela ne peut conduire à aucune construction exécutable.

Sur la page du titre, l'exemplaire mentionné porte, de la main d'Aynscom, l'inscription suivante: „Clarissimo viro domino Christiano Húgenio Auctor D. D."

cher ſi vous avez mieux réuſſi dans les trois autres, je n'y ſaurais trouver mon compte. Sachez ſeulement que je me ſervirai contre vous de cet argument perpétuel, que vous mêmes vous ne pouvez produire le rapport de la circonférence au diamètre que vous préſentez comme donné par chacune des quadratures, ni l'auteur même de la Quadrature, ni tant de ces diſciples qui depuis tant d'années s'y appliquent qu'en moins que cela Troie fut conquiſe. Euclide a défini un rapport comme connu, lorſqu' on peut trouver un autre qui lui eſt égal [37]). Or, qui peut croire que cela s'applique au vôtre, que vous cherchez en vain pendant toute une dizaine d'années [38]). Car ſi vous autres, vous eſtimez qu'il ſuffit que vous montriez le chemin au bout duquel on trouvera ce qui eſt demandé, ſans toutefois écarter les obſtacles et les innombrables difficultés qu'il préſente, allez voir quel géomètre vous puiſſiez perſuader que de cette manière le problème du Tetragoniſme [39]) a été résolu par vous. Il est vrai que vous avez atteint au moins ceci que, n'allant pas plus loin, vous êtes moins expoſés aux récriminations de tout le monde, plus difficilement auſſi vous serez attaqués par les plus habiles, et trouverez plus promptement une ripoſte. Car il vous ſera aiſé d'envelopper ceux qui inſiſteront plus ſérieuſement des ténèbres de vos proportions et proportionnalités et de faire enſorte qu' enfin la nuit, pour ainſi dire, met fin au combat. J'ai craint et tâché d'éviter que cela même ne m'arrivât à moi lorsque j'écrivis l'examen de la Quadrature; m'appliquant à obtenir ſeulement ceci que, pour autant que cela fut poſſible, je réduiſiſſe l'auteur à l'abſurde ſavoir, qu'il avouerait ſoit de ne pas vouloir, ſoit de ne pas pouvoir achever ſa Quadrature. Dans ce but j'ai calculé les dimenſions de corps juſqu' alors inconnus et informes et ayant produit les rapports des deux premiers ſolides, je lui ai demandé qu'il en déduiſit le troiſième puiſqu'il avait dit que les premiers étant donnés le troiſième était connu [40]). Pour défendre celui qui ſe trouve ainſi réduit à l'étroit vous ne répondez rien d'autre qu'en me reprochant que je me ſuis arrogé à enseigner à votre auteur la manière de carrer le cercle et en m'exhortant enſuite de me rappeler *ce que* et *à qui* j'écris [41]). Mais moi je n'ai ni enſeigné, ni preſcrit comment un cercle eſt carré; mais j'inſiſte ſur ceci que celui qui prétend en avoir trouvé la manière montre de fait qu'elle eſt utile et réaliſable. Ainſi donc je juge que maintenant il vous ſera aſſez clair que je n'ai pas ignoré ni ce que ni dans quel but j'ai écrit. A qui j'ai écrit, je ne crois pas non plus l'avoir oublié. Quant à ce point voyez combien différentes ſont la lettre de Deſcartes et les Eloges de vous et des vôtres; auxquelles des deux il faudrait plutôt ſouſcrire c'est ce que je préférerais laiſſer au jugement d'autres qu' impoſer par le mien. Je voudrais ſeulement que l'Auteur de la Quadrature ſût que mon opinion ſur ſon érudition et ſur ſa candeur ſera d'autant plus haute qu'il reviendra plus promptement ſur ſon erreur.

Fait à la Haye, le 2 Oct. 1656.

verſus vos argumentum fore, quod rationem peripheriae ad diametrum quam ſingulis quadraturis datam eſſe profitemini, ipſi tamen exhibere non poteſtis; non autor ipſe Quadraturae, non tot ejus diſcipuli, qui tot jam annis in id incumbunt, ut paucioribus Ilium expugnatum ſit. Datam eſſe rationem, Euclides definivit, cui poſſumus aequalem invenire [37]). Quis autem ad veſtram illam hoc pertinere credet, quae irrito labore toto decennio [38]) quaeſita eſt? Nam quod ſufficere exiſtimatis ſi modò viam commonſtraveritis quâ emenſâ ad quaeſitum perveniatur, obſtacula verò, atque innumeras difficultates quibus praeſepta eſt, non removetis, videte cui perſuadere poſſitis, eâ ratione tetragoniſmi negotium [39]) à vobis confectum eſſe. Illud ſanè vos conſequi apparet, ut, dum ultra non proceditis, minis expoſiti ſitis ad promiſcuos omnium inſultus, difficilius etiam à peritioribus oppugnemini, paratioremque habeatis receptum. Facilè enim acriùs inſtantes proportionum & proportionalitatum veſtrarum tenebris involvere poteſtis, atque efficere ut tandem veluti nox praelium dirimat. Hoc ipſum ne mihi eveniret, cum exetaſin Quadraturae conſcriberem, metuebam, atque ut caverem operam dedi; id unum conatus, ut, quatenus fieri poſſet, autorem ad abſurdum compellerem, nimirum ut vel nolle ſe vel non poſſe Quadraturam ſuam abſolvere fateretur. Eo fine ignota priùs atque informia corpora dimenſus ſum, exhibitiſque prioribus duabus ſolidorum proportionibus, petii ut inde tertiam eliceret, utpote quam cognitis illis notam dixiſſet [40]). Ad quas anguſtias redactum non aliâ ratione defendis, quàm expoſtulando mecum quod autori tuo modum praeſcribere praeſumam quadrandi circulum, ac jubendo denique ut meminerim *quid* & *cui* ſcribam [41]). Ego verò quomodo quadratus fiat circulus, nec didici, nec praeſcribo; ſed hoc urgeo, ut quem ille modum ſe inveniſſe contendit, eum reapſe utilem & efficacem eſſe demonſtret. Atque ita, quid ſcripſerim & in quem finem, me non neſciviſſe, ſatis jam tibi conſtare arbitror. Cui verò ſcripſerim, ne hoc quidem puto me oblitum fuiſſe. Vides autem quam hac in parte longè diverſum ſonent Carteſii literae atque Elogia veſtra: quorum utris potiùs ſubſcribendum ſit aliorum judicio decerni malim quàm meum interponere. Hoc tamen autorem Quadraturae ſcire velim, tanto majori eruditionis & candoris opinione apud me futurum, quantò maturiùs ab errore ſuo reſipiſcet. Vale.

Dat. Hagae - Com. 2. Oct. 1656.

---

[37]) Il s'agit de la deuxième „Definitio" des „Data" d'Euclide. Voir l'ouvrage cité dans la note 1, p. 138 du T. I.

[38]) C'est-à-dire depuis la publication de l'ouvrage de Grégoire en 1647.

[39]) La réduction du cercle au carré (τετραγωνον).

[40]) Voir la „Demonstratio" de la „Prop. 44", p. 1126 du „Lib. 10", où on lit: „Igitur cùm notae sint prima, & secunda ratio, ... etiam nota erit ratio corporis quod oritur ex ductu superficiei EIHM in HPFI ad corpus ortum ex ductu superficiei NKLO in KQRI. Consultez encore le § 7, p. 279 du T. XI, et, de plus, sur tout ce passage les p. 325—327 du T. XI.

[41]) Voir le troisième alinéa de la p. 257 du Tome présent.

TABLES.

I. PIÈCES ET MÉMOIRES.

Page.

TRAVAUX MATHÉMATIQUES DIVERS DE 1652 ET 1653. PROBLÈMES PLANS ET SOLIDES. MAXIMA ET MINIMA .... 1—89

AVERTISSEMENT .... 3—8

I. 1652. Couper une ſphère donnée par un plan de manière que les ſegments aient entre eux la même proportion qu' une donnée 9

II. 1652. Etant donné en poſition un angle avec un point en dehors de cet angle, appliquer dans l'intérieur de ce dernier une droite de longueur donnée dirigée vers le point donné. Et comment Nicomède a trouvé deux moyennes proportionnelles au moyen de la Conchoïde 13

III. 1652. Diviſer une ſphère par un plan dans une proportion donnée, au moyen de la triſection de l'angle 16

IV. [1652]. Par un des ſommets d'un carré donné tirer une droite de manière que la partie compriſe entre les prolongements des deux côtés oppoſés ſoit égale à une droite donnée. Il faut cependant que la droite donnée ne ſoit pas moindre que le double de la diagonale du carré 19

V. 1652. Quelques régles de rédaction, ſervant à réduire, dans les démonſtrations mathématiques, les relations tirées du calcul algébrique aux propriétés des proportions géométriques 21

VI. 1652. Par un point, donné en dehors d'un angle donné, mener une droite de manière que la partie compriſe entre les côtés de l'angle ſoit égale à une droite donnée 26

VII. 1652. Par un des ſommets d'un loſange tirer une droite de manière que la partie compriſe entre les prolongements des deux côtés oppoſés ſoit égale à une droite donnée. Solution obtenue au moyen de deux théorèmes relatifs aux propriétés d'un loſange 32

VIII. 1652. Par un point, donné à l'intérieur d'un angle donné, mener une droite de manière que la partie comprise entre les côtés de l'angle soit égale à une droite donnée. Limite des solutions possibles 38
IX. 1652. Même problème que celui sous VII. Solution différente 42
X. 1652. Trouver un cube double d'un cube donné 45
XI. 1652. D'un point situé en dehors d'un angle, donné en position, mener une droite de manière que la partie comprise entre les deux côtés de l'angle soit égale à la distance du point d'intersection du premier côté à un point donné sur ce même côté 49
Trouver deux moyennes proportionnelles entre deux droites données 50
Autre solution 51
XII. 1652. D'un point, situé en dehors d'un angle donné en position, mener une droite de manière que la distance du point d'intersection du second côté au sommet de l'angle soit égale à la distance du point donné au point d'intersection avec le premier côté 54
Trouver deux moyennes proportionnelles 55
XIII. 1652. [Première partie]. Étant donné un losange, dont un des côtés est prolongé, appliquer dans l'angle extérieur ainsi construit une droite de grandeur donnée qui passe par le sommet opposé ....
[Seconde partie]. Étant donné un losange dont deux côtés contigus sont prolongés, appliquer dans l'angle intérieur une droite de longueur donnée qui passe par le sommet opposé 58
XIV. 1652. DE MAXIMIS ET MINIMIS ....
[Première partie]. Exposition de la méthode de Fermat. Méthode inventée par Huygens 61
[Deuxième partie]. Modification de la méthode de Fermat, appliquée au problème de faire passer par un point donné à l'intérieur d'un angle donné en position, une droite dont la partie comprise entre les côtés de l'angle soit aussi petite que possible 65
[Troisième partie]. Démonstration d'une construction servant à la solution du problème cité 67
XV. 1653. Invention de la règle servant à exprimer l'aire d'un triangle en fonction des côtés 69
XVI. 1653. Étant donnés en position un angle et deux points situés en dehors de l'angle mener par ces derniers deux parallèles qui découpent dans l'intérieur de l'angle une aire égale à un carré donné 72
XVII. 1653 Invention de la tangente à la Cissoïde de Dioclès 76
XVIII. 1653. Invention de la tangente à la Conchoïde à point de rebroussement ... 79
XIX. 1653. D'un point donné en dehors d'une parabole mener une normale à cette courbe 81
XX. 1653. Trouver le point d'inflexion dans la Conchoïde de Nicomède 83

XXI. 1653. Détermination du centre de gravité d'après la méthode de van Schooten s'appliquant aux aires planes ou aux folides de telle nature que, dans un fegment découpé par une fection parallèle à la bafe, le centre de gravité divife le diamètre dans la même proportion que dans la figure donnée le diamètre entier . . 87

DE CIRCULI MAGNITUDINE INVENTA. ACCEDUNT PROBLEMATUM QUORUNDAM ILLUSTRIUM CONSTRUCTIONES. 1654. . . . . .
[SUR L'INVENTION DE LA GRANDEUR DU CERCLE AVEC LES CONSTRUCTIONS DE CERTAINS PROBLÈMES CÉLÈBRES] . . . . . . 91—215

Avertissement . . . . 93—112

Titre en facsimile 113

Préface . . . . 114—119

Sur l'invention de la grandeur du cercle . . . . 121—181

Théor. I. Propof. I. Si dans un fegment de cercle, moindre que la moitié du cercle, on infcrit le plus grand triangle poffible, et pareillement des triangles dans les fegments reftants, le triangle décrit en premier lieu fera moindre que le quadruple de la fomme des deux décrits dans les fegments reftants 120

Théor. II. Propof. II. Soient donnés un fegment moindre que la moitié du cercle, et fur fa bafe un triangle dont les côtés font tangents au fegment; foit tirée de plus une droite tangente au fegment dans fon fommet; cette droite coupera du triangle nommé un triangle plus grand que la moitié du plus grand triangle que l'on puiffe infcrire dans le fegment 122

Théor. III. Propof. III. Tout fegment de cercle, moindre que la moitié du cercle, eft au plus grand triangle infcrit dans un rapport plus grand que quatre à trois 122

Théor. IV. Propof. IV. Tout fegment de cercle, plus petit que la moitié du cercle, eft moindre que les deux tiers du triangle qui a la même bafe et dont les côtés touchent le fegment 126

Théor. V. Propof. V. Tout cercle eft plus grand qu'un polygone à côtés égaux, qui lui eft infcrit, plus le tiers de la quantité dont ce polygone furpaffe un autre polygone infcrit d'un nombre de côtés réduit à la moitié 128

Théor. VI. Propof. VI. Tout cercle eft plus petit que les deux tiers du polygone à côtés égaux que lui eft circonfcrit, plus le tiers du polygone femblable infcrit . 130

Théor. VII. Propof. VII. Toute circonférence de cercle eft plus grande que le périmètre du polygone à côtés égaux qui lui eft infcrit, plus le tiers de la quantité dont ce même périmètre furpaffe le périmètre d'un autre polygone infcrit duquel le nombre des côtés eft la moitié 132

Théor. VIII. Propof. VIII. Un cercle étant donné, fi à l'extrémité du diamètre on mène une tangente, et que l'on tire auffi de l'extrémité oppofée du diamètre une droite qui coupe la circonférence et rencontre la tangente menée: les deux tiers de la tangente interceptée avec le tiers de la droite qui, à partir du point d'interfection, tombe à angles droits fur le diamètre, feront enfemble plus grands que l'arc découpé adjacent 134

Théor. IX. Propoſ. IX. Toute circonférence de cercle eſt plus petite que les deux tiers du périmètre d'un polygone à côtés égaux qui lui eſt inſcrit plus le tiers du périmètre du polygone ſemblable circonſcrit 136
Probl. I. Propoſ. X. Trouver le rapport de la périphérie au diamètre, auſſi proche que l'on veut du vrai 138
Probl. II. Propoſ. XI. Prendre une droite égale à la périphérie d'un cercle donné. 142
Autre ſolution du même problème 144
Troiſième ſolution du même problème 144
Probl. III. Propoſ. XII. Prendre une droite égale à un arc quelconque donné..... 146
Théor. X. Propoſ. XIII. Le côté d'un polygone équilatéral inſcrit dans un cercle eſt moyen proportionnel entre le côté du polygone ſemblable circonſcrit, et la moitié du côté du polygone inſcrit dont le nombre des côtés eſt la moitié...... 148
Lemme. Le rapport de la moitié d'une droite, à cette moitié diminuée d'une partie eſt plus grand que la troiſième puiſſance du rapport de trois moitiés, auxquelles on a ajouté la partie nommée, à trois moitiés 148
Théor. XI. Propoſ. XIV. Toute circonférence de cercle eſt moindre que la plus petite de deux moyennes proportionnelles entre les périmètres de polygones ſemblables, dont l'un eſt régulièrement inſcrit dans le cercle, l'autre circonſcrit. Et le cercle eſt plus petit que le polygone, ſemblable à ceux-là, dont le contour eſt égal à la plus grande des moyennes 150
Théor. XII. Propoſ. XV. Si entre le prolongement du diamètre d'un cercle et la circonférence on place une droite égale au rayon, et que cette droite prolongée coupe le cercle et rencontre la droite touchant le cercle à l'autre extrémité du diamètre: cette droite découpera de la tangente une partie plus grande que l'arc adjacent découpé 156
Théor. XIII. Propoſ. XVI. Si au diamètre d'un cercle on ajoute dans ſa direction un demi-diamètre, et qu' à partir de l'extrémité de la droite ajoutée on mène une droite qui coupe le cercle, et rencontre la droite qui touche le cercle à l'extrémité oppoſée du diamètre: cette droite interceptera ſur la tangente une partie plus petite que l'arc adjacent découpé 158
Théor. XIV. Propoſ. XVII. Le centre de gravité d'un ſegment de cercle diviſe le diamètre de ce ſegment de telle maniere que la partie au ſommet eſt plus grande que l'autre, et plus petite que une et demie fois cette autre 162
Théor. XV. Propoſ. XVIII. Un ſegment de cercle plus petit qu' un demi-cercle eſt au triangle maximum inſcrit dans un rapport plus grand que quatre à trois; mais plus petit que celui de trois et un tiers fois le diamètre du ſegment reſtant au diamètre du cercle augmenté du triple de la droite qui, à partir du centre du cercle, atteint la baſe du ſegment 166
Théor. XVI. Propoſ. XIX. Un arc quelconque, plus petit qu' une demi-circonférence, eſt plus grand que ſa corde augmentée du tiers de la différence dont la corde dépaſſe le ſinus. Mais un tel arc eſt plus petit que la corde priſe avec la

droite qui eſt au dit tiers comme le quadruple de la corde joint au ſinus eſt au double de la corde avec le triple du ſinus 168

Problème IV. Propoſ. XX. Trouver le rapport de la circonférence au diamètre; et au moyen des cordes données inſcrites dans un cercle donné trouver la longueur des arcs auxquels elles ſont ſous-tendues 172

CONSTRUCTIONS DE CERTAINS PROBLÈMES CÉLÈBRES 182 215

Probl. I. Couper une ſphère donnée par un plan de manière que les ſegments ſoient entre eux dans un rapport donné 182

Lemme. Lorſqu' un arc de circonférence eſt coupé en trois parties égales, l'enſemble des trois droites qui ſont ſous-tendues aux parties égales eſt égal à la ſous-tendue de l'arc entier avec une droite qui eſt à la ſous-tendue du tiers comme le carré de celle-ci au carré du demi-diamètre 186

Probl. II. Trouver un cube double d'un cube donné 188

Probl. III. Trouver deux moyennes proportionnelles à deux droites données 190

Autre ſolution du problème 194

Troiſième ſolution du problème 196

Probl. IV. Étant donné un carré dont l'un des côtés eſt prolongé, appliquer dans l'angle entérieur une droite de grandeur donnée qui paſſe par le ſommet oppoſé . . 198

Probl. V. Étant donné un carré dont deux côtés adjacents ſont prolongés, appliquer dans l'angle intérieur une droite de longueur donnée qui paſſe par le ſommet oppoſé. Il faut cependant que la droite donnée ne ſoit pas moindre que le double de la diagonale du carré 198

Probl. VI. Étant donné un loſange dont l'un des côtés eſt prolongé, appliquer dans l'angle extérieur une droite de longueur donnée qui paſſe par le ſommet oppoſé 200

Probl. VII. Étant donné un loſange dont deux côtés adjacents ſont prolongés, appliquer dans l'angle intérieur une droite de longueur donnée qui paſſe par le ſommet oppoſé. Il faut cependant que la droite donnée ne ſoit pas moindre que le double de la diagonale qui joint les deux autres ſommets du loſange 204

Autre ſolution des deux problèmes précédents 206

Probl. VIII. Trouver dans une conchoïde les limites de la courbure contraire 211

APPENDICE I. Septembre 1657.

Comment, au moyen d'une ellipſe donnée quelconque, on peut trouver deux moyennes proportionnelles entre deux données. Et comment la conſtruction ſe ſimplifie lorſque le demi grand-axe eſt le triple de l'ordonnée du foyer 217

APPENDICE II. [1657] . . . .

Comment les Anciens ont trouvé les conſtructions qui s'opèrent par l'interſection de deux ſections coniques 222

APPENDICE III. [Juillet 1659] . . . .

[Première partie]. De l'invention de deux moyennes proportionnelles. Recherche des ſolutions données par de Sluſe 225

[Deuxième partie]. Recherche de la folution de de Slufe du problème : Dans une droite donnée, dans laquelle eft donné un point, trouver un fecond point fitué de maniere que le carré de la diftance de l'une des extrémités de la droite au premier point foit au carré de la diftance des deux points comme cette dernière diftance à celle entre le fecond point et l'autre extrémité 229
[Troisième partie]. Recherche de la folution de de Slufe du problème : étant données deux droites P et Q trouver une troifiéme au carré de laquelle le carré de P a le même rapport que celui de la troifiéme à l'excès de celle-ci fur Q 230
Quatrième partie. Recherche de la trifection de l'angle à l'aide de l'interfection d'un cercle avec une hyperbole équilatère, telle qu'elle fut exécutée par de Slufe. 231
APPENDICE IV. [1659]. Nouvelle folution du problème de trouver le point d'inflexion dans la conchoïde . . . .
AD C. V. FRAN. XAVER. AINSCOM, S. J. EPISTOLA 1656 . . . . 239—277
Avertissement . . . . 241—247
Réponse de F. X. Ainscom à l''Ἐξέτασις de Chr. Huygens . . . . 248—261
Titre de la lettre de Chr. Huygens en facsimile 263
Texte . . . . 264—277

II. PERSONNES MENTIONNÉES.

Académie des Sciences. 106.
„ d'Oxford. 266, 267.
Anderfon (Alexander). 82.
Apollonius. 5, 7, 26, 43, 82, 107, 190, 191, 194, 195, 224.
Archimède. 3, 9, 11, 12, 14, 17, 76, 87, 88, 89, 93, 94, 95, 96, 102, 103, 116, 117, 124, 125, 138, 139, 140, 141, 142, 164, 165, 182, 183, 184, 185, 190, 191, 243, 244, 250, 251.
Auzout (Adrien). 244, 247, 271, 272., 273.
Aynfcom (Franciscus Xaverius). 239, 242—277.
Berckel (Abraham van). 80.
Bie (Alexander de). 99.
Blondel (François). 99.
Briene (C. de). 99.
Briggs (Henry). 94.
Carcavy (Pierre de). 99.
Cartes (René des). 4, 5, 8, 61, 62, 63, 65, 76, 79, 80, 84, 85, 101, 103, 106, 111, 117, 118, 119, 192, 193, 226, 230, 233, 234, 235, 270, 271—277.
Ceulen (Ludolf van), 93, 95, 140, 141.
Chanut (Pierre de). 99, 118.
Cicéron. 241.
Clavius (Chriftoffel). 11, 17, 22, 29, 46, 55, 66, 69, 125, 160, 161, 184, 185, 190, 196, 197, 198, 199, 208, 209.
Clerfelier (Claude). 118.
Coets (Henryck). 111, 236.
Colfter (Jooft van). 93.
Colvius (Andreas). 99.
Commandinus (Fredericus). 31, 38, 39, 41, 82, 210, 211.

Compagnie de Jéfus. 266, 267.
Cufa (Nicolaus de). *95*.
Dioclès. 12, 76, 102, 182, 183, 190, 191.
Dionyfidore. 12, 102, 182, 183.
Ducq (le). *99*.
Elifabeth, Princeffe Palatine. *99*, 118.
Elzevier (Daniel). 113.
„ (Johannes). 113, 246.
Euclide. 11, 12, 17, 18, 29, 30, 35, 46, 55, 66, 69, 124, 125, 160, 161, 184, 185, 190, 191
196, 197, 198, 199, 208, 209, 276, 277.
Eutocius. 3, 12, 14, 15, 76, 102, 103, 104, 182, 183, 190, 191.
Fermat (Pierre de). *6*, *60*, *65*, *66*, *79*, *99*.
Fine (Oronce). *97*, **156**, 157.
Ghetaldi (Marino). 20, 107, 108, 109.
Golius (Jacobus). *97*, *99*.
Grégoire de Saint-Vincent. *9*. 10, *97*, *99*, 241—277.
Gregory (James). 100, 174.
Gutfchoven (Gerard van). *99*, 246, 266, 267.
Halley (Edmund). 94.
Heiberg (J. L.). 3, 9, 11, 12, 14, 17, 76, 93, 102, 103, 104, 164, 183, 184, 185, 190, 191.
Hérigone (Pierre). 107.
Héron. 8, 40, 41, 63, 69, 190, 191.
Heuraet (Hendrik van). 110, 111, 112.
Hobbes (Thomas). *99*.
Hultfch (Fridericus). 13, 14, 31, 38, 39, 82, 86, 210, 211.
Huygens (Conftantyn, père). 118, 120, 121.
„ (Philips, frère). 76, 218),
Kinner von Löwenthurm (Gottfried Aloys). 7, 16, 52, 97, 99, 184, 242, 243, 244, 247.
Kraen. *99*.
Lanfbergen (Philippus van). *95*.
Leopold d'Autriche. 105.
Leotaudus (Vincentius). 244, 247.
Lipftorp (Daniel). *96*.
Longomontanus (Chriftiaan Severin). 176, 177.
Marci de Kronland (Johannes Marcus). *97*, *98*.
Marcus (Jacob). *93*.
Mayboum. Voyez Meibomius.
Meibomius (Marcus). 247.
Ménechme. 104, 222, 223, 224.
Merfenne (Marin). 192, 193, 247, 271.
Milft (J. F. van). 225.

Montbéliard (Pr. de). 99.
Moray (Robert). 99.
Mount (William). 94.
Mylon (Claude). 99.
Newton (Isaac). 94.
Nicomède. 4, 5, 6, 7, 13, 14, 15, 40, 41, 79, 83, 86, 101, 103, 191, 192, 193, 210, 211.
Nonius. 156.
Omnifanctus. 95.
Page (Thomas). 94.
Paige (le). 105.
Pappus. 5, 7, 13, 15, 20, 26, 31, 38, 39, 82, 86, 106, 107, 108, 110, 190, 191, 198, 199, 210, 211.
Pell (John). 47.
Philon le Byzantin. 190, 191.
Roberval (Gilles Perfonne de). 246, 271, 272.
Sarafa (Alphonfus Antonius de). 99, 242, 246, 247, 256, 257, 259, 270, 271.
Schooten (Frans van). 5, 8, 19, 21, 26, 28, 34, 36, 57, 60, 82, 83, 84, 86, 87, 88, 96, 97, 98, 99, 100, 104, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 201, 205, 206, 214, 233, 242, 246, 272, 273.
„ (Pieter van). 5.
Schuh (F.). 174.
Seghers (Daniel). 246, 264, 265.
Sharp (A.). 93, 94.
Sherwin. 93.
Slufe (René François de). 63, 104, 105, 106, 111, 220, 224, 225, 229, 230, 231.
Snellius a Royen (Willebrordus). 93, 94. 95, 96, 97, 98, 99, 117, 118, 119, 129, 148, 157, 159, 162, 163.
Sporus. 190, 191.
Stevin (Hendrik). 99.
Stöckar (J. J.). 99.
Sylvius (Alexius). 244, 247.
Tacquet (Andreas). 99. 242, 246, 264, 265, 266, 267.
Tannery (Paul) 4, 61, 65, 82, 84, 103, 193, 226, 230, 235, 273.
Vafcovanus (Michael). 157.
Vienne. 105.
Vieta (François). 24, 192, 193.
Vlacq (Adriaen). 246.
Waldkirch (Heinrich). 177.
Wall (van der). 99.
Wallis (John). 94, 246, 266, 267.
Witt (Johan de). 105.

III. OUVRAGES CITÉS.

Al. Anderson, Excercit. Mathemat. Decas prima, 1619. 82.
Apollonius Pergaeus, Conicorum Libr. 4. Ed. F. Commandinus. 1566. 7, 82, 194, 195.
Archimedis, Opera. Adj. Eutocii Ascolon. Commentaria. 1544. 3, 9, 11, 12, 14, 15, 17, 76, 102, 103, 104, 124, 164, 182, 183, 184, 185, 190, 191, 192, 222, 243, 244.
" Opera omnia cum commentariis Eutocii. Ed. J. L. Heiberg, 1668—81. 3, 9, 11, 12, 14, 15, 17, 76, 93, 102, 103, 104, 124, 138, 164, 182, 183, 184, 185, 190, 191, 192, 222, 243, 244.
A. Auzout, Tractatus de Rationibus. 247.
Fr. Xav. Aynscom, Expositio ac Deductio geometrica, 1656. 244—275.
M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Bd. I. Dritte Aufl. 1907. 191.
R. des Cartes, Geometria. Ed. Fr. à Schooten, 1659. 106, 111.
" Géométrie. 1637. 61, 101, 103.
" Œuvres. éd. de Charles Adam et Paul Tannery, 4, 61, 62, 65, 82, 84, 85, 103, 119, 193, 226, 234, 235, 272, 273.
" Opuscula posthuma, physica et mathematica, 1701. **118**, 119.
L. van Ceulen, De Arithmetische en Geometrische fondamenten, 1615. **93**, 141.
" Van den Circkel, 1596. 93.
N. de Cuse, Opera, Ed. J. Faber Stapulensis, 1514. 95.
Euclidis, Data. Ed. Cl. Hardy, 1625. 276, 277.
" Elementorum Libri XV. Auct. Chr. Clavio, 1607. 11, 17, 22, 29, 30, 35, 46, 55, 66, 69, 124, 125, 160, 161, 190, 191, 196, 197, 198, 199, 208, 209.
O. Finaeus. De rebus mathematicis hactenus desideratis, Libri IIII, 1556. **157**.
" Protomathesis, 1532. 157.
" Quadratura circuli demonstrata. 1544. 97, **156**, 157.
M. Ghetaldus, Apollonius redivivus, 1607. 20, 107, 108, 109.

M. Ghetaldus, De Refolutione et Compofitione mathematica libri quinque, 1640. 108, 109.

Gregorius à St. Vincentio, Opus Geometricum, Quadratura Circuli et Sect Coni. 1647. 11, 242, 243, 245, 248—277.

P. Hérigone, Curfus mathematicus Nova, 1634—44. 107, 109.

Chr. Huygens, Ad C. V. Fran. Xav. Ainfcom, S. I. Epiftola. 246, 247.

„ Conftructio problematum folidorum per refolutionem aequationis in duos locos. 106, 244.

„ Contributions aux Commentaires de Van Schooten fur la Geometria Renati Defcartes. 233.

„ De Circuli Magnitudine Inventa, acc. illuftr. quorundam problematum conftructiones. 1654. 4, 6, 7, 16, 19, 26, 28, 29, 34, 36, 37, 45, 46, 47, 49, 51, 52, 54, 57, 83, 86, 91, 98, 100, 101, 103, 104, 106, 110, 113—217, 222, 232.

„ Demonftratio regulae de maximis et minimis. 6, 7, 8, 60, 234.

„ Exetafis Cyclometriae etc., 1651. 241, 242, 245, 247, 248—261, 264, 265, 267, 268, 269, 272, 273, 276, 277.

„ Méthode pour conftruire les Équations cubiques, etc. 1680. 106.

„ Theoremata de Quadratura hyperbolis, ellipfis et circuli. 96, 163, 166, 167.

„ Travaux mathématiques divers de 1652 et 1653. 100, 101, 103, 110.

G. A. Kinner à Löwenthurn, Elucidatio geometrica Probl. Auftr. 1653. 243, 247.

Phil. Lanfbergen, Cyclometriae novae libri duo, 1616. 95.

V. Leotaud. Cyclomathia feu multiplex Circuli contemplatio, 1663. 247.

„ Examen Circuli Quadraturae celeb. 1655. 247.

Chr. S. Longomontanus, Cyclometria ex Lunulis reciproce demonftrata, 1612. 177.

M. Marci de Kronland, Labyrinthus feu via ad circuli quadratura, 1654. 97.

M. Meibomius, De Proportionibus Dialogus, 1655. 247.

M. Merfenne, Harmonicorum Libri, II Vol., 1648. 192.

„ Novae Obfervat. Phyfico-Mathemat. 1647. 247.

Nonius, De Erratis Orontii Finaei, 1546. 156.

Paige, Correfpondance de De Slufe, 1884 105.

Pappi Alexandrini, Mathematicae Collectiones, Ed. F. Commandinus, 1588. 5, 15, 20, 26, 31, 38, 39, 41, 43, 82, 86, 107, 198, 199, 210, 211.

„ Collectionis quae fuper funt. Ed. Fr. Hultsch. 1877. 13, 15, 31, 38, 39, 41, 82, 86, 210, 211.

J. Pell, Controverfia de vera Circuli menfura, 1647. 47, 176, 177.

A. A. de Sarafa, Solutio Problematis a R. P. M. Merfenne propofita, 1649. 242, 246, 247, 256, 257, 258, 259, 270, 271.

Fr. a Schooten, Excercitationum Mathematicorum Libri V. 1657. 87, 88.

„ Tractatus de concinnandis Demonftrationibus geometricis ex Calculo algebraico. 1661. 5, 21.

F. Schuh, Sur quelques formules approximatives de la circonférence du cercle et sur la Cyclométrie de Huygens. 174.

Sherwin, Mathematical Tables, contriv'd after a moſt comprehenſive Method. 1705. **93**, 94.
R. F. Sluſius, Meſolabum, 1659. 105, 224, **225**, 229, 230, 231.
„ Meſolabum. Acc. de Analyſi et Miſcellanea, 1668. 104, 105, 106, 224, 229, 230, 231.
„ Correſpondance. Voyez *Paige*.
W. Snellius, Cyclometricus. De circuli dimenſione. 1621. 93, **94**, 118, 119, 148, 157, 158, 159, 162, 163.
A. Sylvius, Lunae Circulares Periodi, 1651. 247.
Fr. Vieta, Opera Mathematica. Ed. Fr. à Schooten, 1646. 24, 192.
J. Wallis, Arithmetica Infinitorum, 1656. 246, 266, 267.
Archives Néerlandaiſes. 174.

IV. MATIÈRES TRAITÉES.

Dans cette Table les matières fcientifiques traitées dans ce Volume XII ont été groupées fous divers articles généraux, favoir:

Algèbre.
Arithmétique.
Géométrie.
Mécanique.
Œuvres.
Optique.
Trigonométrie.

Pour connaître tous les endroits où quelque fujet eft traité, on cherchera dans la Table l'article général auquel il appertient. On y trouvera, foit du fujet même, foit d'un fous-article qui devra y conduire, la nomenclature adoptée dans l'ordre alphabétique de la Table.

Les chiffres indiquent les pages.

On a marqué d'un aftérique les endroits qui ont été jugés les plus importants.

L'article *Œuvres* fe rapporte aux écrits de Huygens, foit publiés, ici ou ailleurs, foit feulement ébauchés.

Algèbre. (voir *Emploi de l'analyfe algébrique par les anciens pour la folution des problèmes géométriques*, *Équations algébriques*, *Expofants incommenfurables*, *Logarithmes*, *Maxima et minima*, *Principes du calcul différentiel et intégral*, *Rédaction à la mode des anciens des problèmes géométriques réfolus par l'analyfe algébrique*, *Suites géométriques*).

Application de la théorie du centre de gravité a la quadrature approchée du cercle. 96*—98*, 115*, 117*, 163*—171*, 173*, 175*.

Arithmétique. (voir *Calcul du nombre Π*, *Suites géométriques*).

Calcul du nombre Π. 93*—100*, 115, 117*, 119*, 129*, 131*, 135*, 136*, 139*, 141*, 143*, 159*, 166*, 168*, 169*, 173*, 175*, 177*, 179*, (voir *Application de la théorie du centre de gravité à la quadrature approchée du cercle*).

Centre de gravité. (voir *Application de la théorie du centre de gravité à la quadrature approchée du cercle*, *Méthode de van Schooten pour trouver les centres de gravité de certaines*

figures ſimples). D'un arc de cycloïde 99*; d'un ſegment de cercle 163, 165, 167; d'un ſegment de parabole 87—89, 97; d'un ſegment elliptique ou hyperbolique (voir *Œuvres:* Theoremata de Quadratura hyperboles, ellipſis et circuli, ex dato portionum gravitatis centro); du triangle 8.

CERCLE. (voir *Centre de gravité*, *Propriétés des polygones réguliers inſcrits et circonſcrits*, *Quadrature de ſurfaces planes*, *Rectification approchée d'un arc de cercle*, *Triangle*).

CISSOÏDE. (voir *Tangentes*).

CONCHOÏDE. 4*, 5*, 13—15; (voir *Œuvres*: Illuſtrium quorundam problematum conſtructiones, *Tangentes*).

CONIQUES. (voir *Cercle*, *Hyperbole*, *Parabole*).

CONSTRUCTION DU PLUS PETIT SEGMENT QUE, DANS UN ANGLE DONNÉ, ON PUISSE FAIRE PASSER PAR UN POINT DONNÉ. 6*, 35, 36, 39*—41*.

CONSTRUCTIONS (voir *Problèmes divers*, *Rectification approchée d'un arc de cercle*, *Réſolution par conſtruction des équations algébriques*).

COURBES. (voir *Cercle*, *Ciſſoïde*, *Conchoïde*, *Coniques*, *Cycloïde*, *Normales*, *Tangentes*).

CUBATURE. (voir *Cubature des ſolides de révolution*). De l'onglet parabolique 259, 261, 269*; des ſolides de l'Exetaſis. 249, 251, 255, 257, 269, 277.

CUBATURE DES SOLIDES DE RÉVOLUTION. Du ſecteur ſphérique 11, 17, 185; du ſegment ſphérique 11, 12, 18, 185, 187.

CYCLOÏDE. (Voir *Centre de gravité*, *Recherches de Huygens sur la cycloïde*).

DUPLICATION DU CUBE. (voir *Œuvres*: Illuſtrium quorundam problematum conſtructiones). Solution approximative 6*, 46*—48*, 102*, 189*.

DYNAMIQUE. (voir *Œuvres*: Regulae de motu corporum ex percuſſione).

EMPLOI DE L'ANALYSE ALGÉBRIQUE PAR LES ANCIENS POUR LA SOLUTION DES PROBLÈMES GÉOMÉTRIQUES. 5*, 13*—15*, 222*—224*.

ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES. (voir *Équations cubiques et biquadratiques*, *Réſolution par conſtruction des équations algébriques*). Racines égales 61*, 62*, 63—65.

ÉQUATIONS CUBIQUES ET BIQUADRATIQUES. 101*, 111, 219, 232—234, 235*; (voir *Problèmes ſolides menant à des équations cubiques ou biquadratiques*).

EXPOSANTS INCOMMENSURABLES. 245, 246*.

FORMULE DE HÉRON POUR L'AIRE DU TRIANGLE EN FONCTION DES CÔTÉS 8, 69—71.

GÉOMÉTRIE. (voir *Calcul du nombre Π*, *Centre de gravité*, *Conſtructions*, *Courbes*, *Cubature*, *Emploi de l'analyſe algébrique par les anciens pour la réſolution des problèmes géométriques*, *Géometrie cartéſienne*, *Maxima et minima*, *Normales*, *Œuvres*, *Planimétrie*, *Points d'inflexion*, *Principes du calcul différentiel et intégral*, *Problèmes divers*, *Quadrature*, *Rectification*, *Rédaction à la mode des anciens des problèmes géométriques réſolus par l'analyſe algébrique*, *Sphère*, *Stéréométrie*, *Tangentes*).

GÉOMÉTRIE CARTÉSIENNE. 222—231; (voir *Emploi de l'analyſe algébrique par les anciens pour la réſolution des problèmes géométriques*).

GONIOMÉTRIE. 47, 48, 117, 163, 173, 179, 181*.

HYPERBOLE. (voir *Centre de gravité*, *Quadrature de ſurfaces planes*).

LOGARITHMES. 242, 245, 246.

MAXIMA ET MINIMA. (voir *Conſtruction du plus petit ſegment que, dans un angle donné, on puiſſe faire paſſer par un point donné*, *Méthode de Fermat pour les maxima et minima*, *Méthode pour les maxima et minima fondée ſur l'égalité de deux racines de l'équation qu'on obtient en égalant l'expreſſion donnée à une conſtante*, *Œuvres:* Demonſtratio regulae de maximis et minimis).

MÉCANIQUE. (voir *Centre de gravité*, *Dynamique*).

MENER PAR UN POINT DONNÉ UNE DROITE DONT DEUX DROITES, DONNÉES EN POSITION, DÉCOUPENT UN SEGMENT DONNÉ. 5*, 6*, 13*, 14*, 26*, 27*, 38*—40*, 60*, 62*, 63*, 66*—68*; (voir *Conſtruction du plus petit ſegment que, dans un angle donné, on puiſſe faire paſſer par un point donné*, *Œuvres:* Illuſtrium quorundam problematum conſtructiones).

MÉTHODE DE DESCARTES POUR LES NORMALES ET LES TANGENTES. 8*, 61, 65*, 76, 79, 80.

MÉTHODE DE FERMAT POUR LES MAXIMA ET MINIMA. 6*, 7, 8, 60*, 61*, 65*, 66*, 79.

MÉTHODE DE VAN SCHOOTEN POUR TROUVER LES CENTRES DE GRAVITÉ DE CERTAINES FIGURES SIMPLES. 8, 87*—89*.

MÉTHODE POUR LES MAXIMA DE MINIMA FONDÉE SUR L'ÉGALITÉ DE DEUX RACINES DE L'ÉQUATION QU'ON OBTIENT EN ÉGALANT L'EXPRESSION DONNÉE À UNE CONSTANTE. 61*—65*.

NORMALES. (voir *Méthode de Deſcartes pour les normales et les tangentes*, *Œuvres:* Contributions aux Commentaires de van Schooten ſur la Geometrie Renati Deſcartes). Mener les normales d'un point donné à une conique. 82, 224*.

ŒUVRES. *Theoremata de Quadratura hyperboles, ellipſis, et circuli ex dato portionum gravitatis centro.* 96*, 163, 167*.

Exetaſis Cyclometriae *Cl. Viri Gregorii à S. Vincentio.* 241*, 242*, 245*, 247*, 248*—261*, 263*—277*.

Travaux mathématiques divers de 1652 *et* 1653. 1*—89*, 100*, 101*, 103, 110.

De circuli magnitudine inventa. 93*—100*, 101*, 113*—181*; (voir plus ſpécialement *Application de la théorie du centre de gravité a la quadrature approchée du cercle*, *Calcul du nombre Π*, *Rectification approchée d'un arc de cercle*, *Trigonométrie*),

Illuſtrium quorundam problematum conſtructiones. 4—7, 16, 19, 26, 34, 28, 29, 36, 37, 45, 46, 47, 49, 51, 52, 54, 57, 83, 86, 91, 98*, 100*—112*, 182*—237*, (voir plus particulièrement pour les problèmes traités dans cet ouvrage: **1.** Datam ſphaeram plano ſecare, ut portiones inter ſe rationem habeant datam. 3*, 4*, 9*—12*, 16*—18*, 101*, 102*, 183*, 185*. **2.** Cubum invenire dati cubi duplum et **3.** Datis duabus rectis duas medias invenire. 4*, 6*, 13*—15*, 40, 41, 45*, 46*, 48*—56*, 63, 97, 101*—106*, 115, 151, 157, 189*, 191*, 193*, 195*, 197*, 217*—229*. **4.** Quadrato dato et uno latere producto, aptare ſub angulo exteriori rectam magnitudine datam quae ad angulum oppoſitum pertineat. 5*, 38, 101, 103, 106*, 109*, 110*, 199*. **5.** Dato quadrato, et duobus contiguis lateribus productis, aptare ſub angulo interiori rectam magnitudine datam quae per angulum oppoſitum tranſeat. Oportet autem non minorem eſſe datam quam ſit quadrati diameter dupla. 5*, 19*, 20*, 38, 39, 101, 103, 107*, 109*, 110*, 199*, 201*. **6.** Rhombo dato, et uno latere producto, aptare ſub angulo exteriori lineam magnitudine datam quae ad oppoſitum angulum pertineat. 5*, 26*—31*, 38, 57*, 58*, 101*, 103*, 107*—110*, 201*, 203*, 207*, 209*. **7.** Rhombo

dato et duobus contiguis lateribus productis, aptare sub angulo interiori rectam magnitudine datam quae per oppositum angulum transeat. Oportet autem datam non minorem esse quam duplam diametri quae reliquos duos rhombi angulos conjungit. 5*, 32*—37*, 38, 39, 42*—44*, 58*, 59*, 101*, 103, 109*, 110*, 205*, 207*, 209*, 211*. 8. In conchoïde invenire confinia flexus contrarii. 7*, 83*—86*, 101*, 110*—112*, 211*, 213*, 232*—237*.

Ad C. V. Fran. Xav. Ainscom, S. I. Epistola. 239*—277*.

Dioptrica. 7*.

Contributions aux Commentaires de van Schooten sur la Geometria Renati Descartes. Construction de la normale à la conchoïde (ed. secunda 1659, p. 253), 233; mener les normales à la parabole d'un point donné (ed. secunda 1659, p. 322). 7*, 81*, 82*.

Demonstratio regulae de maximis et minimis 6*, 7, 8, 60*—67*, 77*, 79*, 84, 233, 234*.

Examen de „Vera circuli et Hyperboles Quadratura, in propriâ suâ proportionis specie inventa et demonstrata à Jacobo Gregorio Scoto, in 4°. Patavii" (voir *Polémique avec Gregory sur sa „vera circuli et hyperboles quadratura"*).

Regulae de motu corporum ex mutuo impulsu. 7*.

Méthode pour construire les équations cubiques et quarrésquarrés et les resolvant en deux lieux. 106*, 222*—231*.

Constructio problematum solidorum per resolutionem aequationis in duos locos. 106*, 222*—224*.

Optique. (voir *Œuvres:* Dioptrica).

Parabole. (voir *Centre de gravité, Œuvres:* Contributions aux Commentaires de van Schooten sur la Geometria Renati Descartes).

Percussion. (voir *Œuvres:* Regulae de motu corporum ex mutuo impulsu).

Planimétrie. 187, 188; (voir *Problèmes de planimétrie, Propriétés des polygones réguliers inscrits et circonscrits, Triangle*).

Points d'inflexion. (voir *Œuvres:* Illustrium quorundam problematum constructiones).

Polémique avec Gregory sur sa „vera circuli et hyperboles quadratura." 174*.

Principes du calcul différentiel et intégral (voir *Méthode de Descartes pour les normales et les tangentes, Méthode de Fermat pour les maxima et minima, Méthode pour les maxima et minima fondée sur l'égalité des deux racines de l'équation qu'on obtient en égalant l'expression donnée à une constante, Œuvres:* Demonstratio regulae de maximis et minimis, *Recherches de Huygens sur la cycloïde*).

Problème deliaque. (voir *Duplication du cube*).

Problème du mésolabe. 255 (voir *Duplication du cube*).

Problèmes de planimétrie. (voir *Œuvres:* Illustrium quorundam problematum constructiones).

Problèmes divers dépendant de la résolution d'une équation du second degré. 8, 72—75.

Problèmes divers. (voir *Duplication du cube, Normales, Problème du mésolabe, Problèmes de planimétrie, Problèmes solides menant à des équations cubiques ou biquadratiques, Problèmes solides résolus à l'aide d'une courbe tracée d'avance, Rédaction à la mode des anciens des problèmes géométriques résolus par l'analyse algébrique, Trisection de l'angle*).

Problèmes solides menant a des équation cubiques on biquadratiques. 3*, 4*, 6*, 38, 39, 49, 50, 54, 82*, 101*, 105*, 108*, 189, 222*, 229—231; (voir *Construction du plus*

petit segment que, dans un angle donné, on puisse faire passer par un point donné, Duplication du cube, Emploi de l'analyse géométrique par les anciens pour la solution des problèmes géométriques, Mener par un point donné une droite dont deux droites, données en position, découpent un segment donné, Normales, Œuvres: Illustrium quorundam problematum constructiones, *Problèmes solides résolus à l'aide d'une courbe tracée d'avance*).

PROBLÈMES SOLIDES RÉSOLUS À L'AIDE D'UNE COURBE TRACÉE D'AVANCE. 7*, 86*, 105*, 111*, 214, 217*, 221*; 233*—237*.

PROPRIÉTÉS DES POLYGONES RÉGULIERS INSCRITS ET CIRCONSCRITS. 94*, 149, 153*.

QUADRATURE DE SURFACES PLANES. Cercle 97, 243, 255; (voir *Application de la théorie du centre de gravité à la quadrature approchée du cercle, Œuvres:* Theoremata de Quadratura hyperboles, ellipsis, et circuli ex dato portionum gravitatis centro, Exetasis Cyclometriae Cl. Viri Gregorii à S. Vincentio, De circuli magnitudine inventa, Ad C. V. Fran. Xav. Ainscom, S. I. Epistola, *Polémique avec Gregory sur sa „vera circuli et hyperboles quadratura"*). Hyperbole 242, 245, 249; (voir *Œuvres:* Theoremata de Quadratura hyperboles, ellipsis et circuli ex data portionum gravitatis centro, *Polémique avec Gregory sur sa „vera circuli et hyperboles quadratura"*).

RECHERCHES DE HUYGENS SUR LA CYCLOÏDE. 99*, 100*.

RECTIFICATION. (voir *Rectification approchée d'un arc de cercle*).

RECTIFICATION APPROCHÉE D'UN ARC DE CERCLE. 97*, 100*, 117*, 133, 135, 137, 139, 143*, 145*, 147*, 149*, 157, 159, 161, 169, 171, 175.

RÉDACTION À LA MODE DES ANCIENS DES PROBLÈMES GÉOMÉTIQUES RÉSOLUS PAR L'ANALYSE ALGÉBRIQUE. 8*, 21*—25*, 33, 73—75, 88, 89.

RÉSOLUTION PAR CONSTRUCTION DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES. 4*, 5*, 7*, 82, 84*, 85*, 101*, 102*, 104*—106*, 222*; (voir *Duplication du cube, Œuvres:* Méthode pour construire les équations cubiques et quarrésquarrés en les resolvant en deux lieux, Constructio problematum solidorum per resolutionem aequationis in duos locos, *Problèmes solides résolus à l'aide d'une courbe tracée d'avance, Trisection de l'angle*).

SPHÈRE. (voir *Cubature des solides de révolution, Œuvres:* Illustrium quorundam problematum constructiones).

STÉRÉOMÉTRIE. (voir *Cubature des solides de révolution*).

SUITES GÉOMÉTRIQUES. Sommation 124.

TANGENTES. (voir *Méthode de Descartes pour les normales et les tangentes*). Cissoïde 8, 76*—78*; Conchoïde 8, 79*, 83.

TRIANGLE. (voir *Centre de gravité, Formule de Héron pour l'aire du triangle en fonction des côtés*). Triangles inscrits et circonscrits d'un segment de cercle 121, 123, 125, 127, 167, 169.

TRIGONOMÉTRIE. 117, 163; (voir *Goniométrie*).

TRISECTION DE L'ANGLE. 4*, 7*, 16*—18*, 38, 85*, 86*, 101*, 102*, 104, 183*, 211*, 213*, 215, 230*, 231*.


299

